2 DER LASERSTRAHL ALS WERKZEUG

Der Umgang mit dem Laserstrahl als Werkzeug für die Materialbearbeitung ist nichts Besonderes. Dazu werden einfache optische Komponenten benötigt wie die im Schreibprojektor, Bild 1. Hier wird Licht aus einer Glühwendel über eine flache Linse (hier Fresnel-Linse) gebündelt. Zweck dieser Bündelung ist, dass das Licht aus der Quelle „Glühwendel“ möglichst vollständig durch eine Abbildungsoptik geführt werden kann. Im Bild ist die Abbildungsoptik zur Seite geschwenkt, so dass der engste Querschnitt des Bündels zugänglich wird. Dort ist die Lichtleistung derart konzentriert, dass eine Zigarre zum Brennen gebracht wird. Durch den Zigarrenrauch wird der Lichtweg sichtbar, Bild 2.

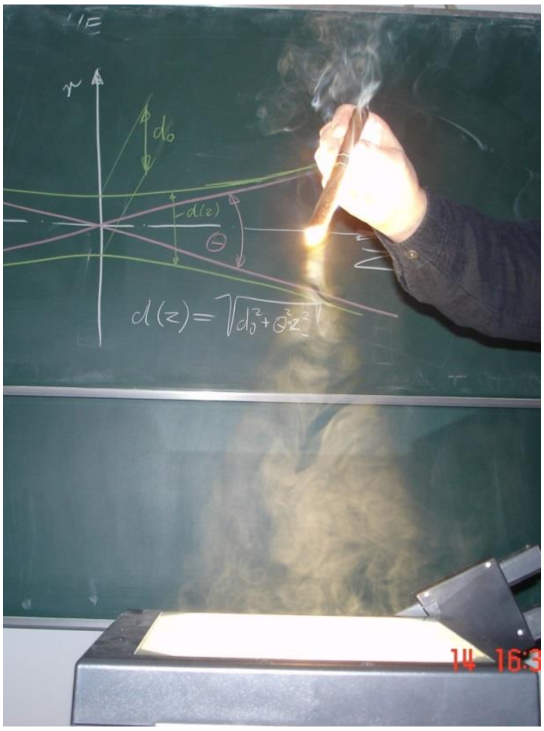


Bild 1: Gebündeltes Glühlampenlicht zum Zünden einer Zigarre

Deutlich erkennbar ist die Begrenzung des Lichtbündels in der Form eines einschaligen Hyperboloids. Dieser enthält immer einen engsten Querschnitt, den Fokus. Hier wurde also aus einer Strahlquelle, der Glühwendel, ein Strahlenbündel aus Licht geformt. Das gleiche Verhalten zeigen prinzipiell auch Strahlenbündel, deren Strahlquellen Laser sind, also Laserstrahlen.

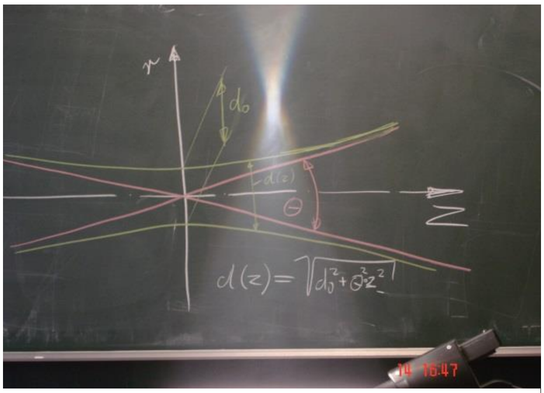


Bild 2: Ein fokussiertes Lichtbündel, sichtbar durch Zigarrenrauch. Die Begrenzung ist ein Hyperboloid.

Der Umfang, in dem sich Formung und andere Eigenschaften von Laserstrahlen verändern lassen, ist allerdings viel weiter als der von Glühlampenlicht. So können Leistungen bis in den Terawattbereich und Fokusdurchmesser bin hinab zu Nanometern eingestellt werden. Auf der einen Seite lassen sich sogar Grenzbedingungen einstellen, die lediglich durch die heute allgemein anerkannte Grenze der Physik eingeschränkt werden: durch die Unschärferelation. Die andere Seite unterscheidet sich nicht von den allgemein bekannten Regeln im Umgang mit Licht oder anderen Strahlen.

Diese Vielfalt von einstellbaren Eigenschaften lässt Laserstrahlen zu verschiedensten Werkzeugen verwenden, die bei der Bearbeitung von Werkstoffen und anderen Materialien Vorteile gegenüber konventioneller Fertigungstechniken bringen können. Auch neue Produktionsverfahren sind möglich. Allerdings sollten dafür die Eigenschaften des Werkzeugs Laserstrahl bekannt sein. Dazu kann dieses Kapitel helfen.

Der Inhalt dieses Kapitels ist auf diejenigen Eigenschaften von Laserstrahlen beschränkt, die zum Verständnis der Materialbearbeitung mit Laserstrahlen in der Fertigungstechnik hilfreich sind. Der Laserstrahl als Werkzeug ergänzt die konventionellen Fertigungstechniken, ist aber heute noch nicht so bekannt, dass Möglichkeiten und Grenzen für seine Verwendung sicher beurteilt werden können. Daher wird hier auf die wesentlichen Eigenschaften eingegangen. Diese werden so behandelt, dass die Aussagen nachvollziehbar sind und sich aus eigenen Überlegungen heraus ergänzen lassen. Andererseits sind sie so umfangreich dargestellt, dass neue Ideen zur Auswahl von Laserstrahlen für besondere noch nicht verwirklichte Anwendungsmöglichkeiten gefunden werden können. Zum leichteren Einprägen sind die Regeln und Gesetzmäßigkeiten auch abgeleitet oder durch Anschauungen plausibel gemacht. Als Voraussetzung beim Leser genügen Kenntnisse im Umgang mit mathematischen Formalismen. Grundlegende physikalische Kenntnisse sind nützlich. Ohne diese können die Aussagen und Gesetze einfach hingenommen werden.

2.1 GRUNDLEGENDEN DEFINITIONEN[1]

2.1.1 LASERSTRAHL

Ein Laserstrahl ist ein Strahlenbündel[2] aus dem Bereich **optischer Strahlung** und Röntgenstrahlung, die in einem Laser erzeugt wird. Diese Strahlung lässt sich als Teilchenstrom und als elektromagnetische Welle betrachten und beschreiben. Ein Laserstrahl unterscheidet sich von gewöhnlicher optischen Strahlen unter anderem durch eine besondere zeitliche und räumliche **Kohärenz** der Strahlung, sowie durch die **Monochromasie** (Einfarbigkeit oder spektrale Breite, im Frequenzbild: Bandbreite). Beide Größen können über Laserstrahlen in Umfängen ausgewählt und reproduziert werden, die mit anderen Strahlern nicht erreichbar sind. Dazu kommt noch die **Zeitdauer** der Strahlung, die reproduzierbar vom Femtosekundenbereich hin bis zur kontinuierlichen Strahlung gesteuert werden kann. Für Aufgaben in der industriellen Materialbearbeitung sind außerdem von hohem Interesse die **Strahlleistung** und die **Bestrahlungsstärke** (**Leistungsdichte**, Intensität)

2.1.2 OPTISCHE STRAHLUNG

ist der Bereich der **elektromagnetischen Strahlung** mit Wellenlängen λ, für die gilt: 100 nm < λ < 1 mm. Unterhalb von 100 nm schließt sich die Röntgenstrahlung an; bei 1 mm beginnen die Mikrowellen.

2.1.3 ELEKTROMAGNETISCHE STRAHLUNG

hier als Welle beschrieben[3]: Elektromagnetische Welle, deren elektrische Feldstärke $\overrightarrow{E_{el}}$ (und somit auch die über die Maxwellgleichungen eindeutig verknüpfte magnetische Feldstärke $\overrightarrow{H_{el}}$) sich periodisch zeitlich und einsinnig räumlich ändert. In den Betrachtungen bevorzugt wird die elektrische Feldstärke $\overrightarrow{E_{el}}$. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit ist die **Lichtgeschwindigkeit *c*.** Die

periodische Änderung wird durch die **Periodendauer *T***, die **Wellenlänge** λ oder die **Frequenz** ν gekennzeichnet. Der Zusammenhang ist $c = \lambda \cdot \nu$ und $\nu = 1/T$

Für die Ausbreitungsgeschwindigkeit im Vakuum (und damit näherungsweise auch in Luft im Normalzustand) gilt per Definitionem: $c = 2{,}99792458 \cdot 10^8$ m/s

Anstelle der Feldstärken wird die Bestrahlungsstärke *E* (auch flächenbezogene Leistungsdichte *E* oder Intensität *I)* betrachtet, da die Feldstärken praktisch nicht messbar sind und auch mit etwa 10^{15} Hz oszillieren. Die Bestrahlungsstärke ist proportional zum zeitlichen Mittelwert des Feldstärkenquadrates, Gleichung (1). Dieser zeitliche Mittelwert ist Messungen direkt zugänglich.

$$E = \frac{1}{2} \cdot \hat{E}_{el}^{\;2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}{\mu_r \cdot \mu_0}} \tag{1}$$

Hierin ist $\hat{E}_{el}$ der Scheitelwert der elektrischen Feldstärke, $\varepsilon_0 = 8{,}85418782 \cdot 10^{-12} \cdot \mathrm{A \cdot s/V \cdot m}$ die elektrische Feldkonstante, ε_r die Permittivitätszahl, $\mu_0 = 4 \cdot \pi \cdot 10^{-7}$ Vs/Am die magnetische Feldkonstante und, μ_r die Permeabilitätszahl. Wenn anstelle des Scheitelwerts der elektrischen Feldstärke deren Effektivwert E_{el} betrachtet wird, dann gilt $E = E_{el}^{\;2} \sqrt{\frac{\varepsilon_r \cdot \varepsilon_0}{\mu_r \cdot \mu_0}}$.

Im Vakuum und näherungsweise auch in Luft gilt $\varepsilon_r = 1$, $\mu_r = 1$. Allgemein sind ε_r und μ_r größer als 1. Sie definieren den Brechungsindex *n* mit $n = \sqrt{\varepsilon_r \cdot \mu_r}$.

In Materie mit der Brechzahl *n* breitet sich das Licht mit der Geschwindigkeit (Phasengeschwindigkeit) $c_1 = c/n$ aus. Diese ist im Allgemeinen niedriger als die Vakuum-Lichtgeschwindigkeit *c*. Weiterhin gilt der Zusammenhang zwischen den Naturkonstanten: $\varepsilon_0 \cdot \mu_0 = 1/c^2$. Die Bestrahlungsstärke *E* ist ein Maß für die Leistungskonzentration und hat die Dimension „Leistung durch Fläche“.

2.1.4 KOHÄRENZ

Kohärent bedeutet „zusammenhängend“. In der Praxis wird in einem Lichtbündel dann Kohärenz festgestellt, wenn in dem Bündel Interferenzen messbar (sichtbar) werden. Dazu dürfen Wegunterschiede zwischen zwei Strahlwegen aus einer Quelle bis zum Ziel eine gewisse Länge, die Kohärenzlänge, nicht überschreiten. Wegunterschiede zweier aus einem Punkt kommender Strahlen bestimmen die **zeitliche Kohärenz** (die Zeit zum Erreichen des Zieles auf unterschiedlichen Längen von Strahlwegen ist wegen der endlichen Lichtgeschwindigkeit verschieden). Sonnenstrahlung (Sonnenlicht) lässt Wegunterschiede in Längsrichtung bis etwa 3 µm noch zu, um Interferenzen sichtbar zu machen. Das bedeutet, dass Sonnenstrahlung aus Wellenzügen zusammengesetzt ist, die etwa 3 µm lang sind. In Laserstrahlen können Wegunterschiede zwischen Strahlen von Mikrometern bis zu vielen Kilometern noch Interferieren. Zwischen beiden Grenzen lassen sich für unterschiedlichste Aufgaben passende Laserstrahlen auswählen. So wird eine große zeitliche Kohärenzlänge geeigneter Laserstrahlen in Messaufbauten zum Nachweis von Gravitationswellen eingesetzt.

Der seitliche Abstand zweier Punkte einer ausgedehnten Strahlungsquelle, für den noch Interferenz beobachtet wird, bestimmt die **räumliche Kohärenz**.[4]

2.1.5 MONOCHROMASIE

Strahlung mit genau einer Wellenlänge λ wird als monochromatisch (einfarbig) bezeichnet. Diese Strahlung ist, wie die **Unschärferelation** zeigt, nicht herstellbar. Zu jeder Wellenlänge λ gehört eine spektrale Bandbreite $\Delta\lambda$. Diese ist mit der zeitlichen Kohärenzläng l_t verknüpft:

$$\Delta\lambda = \frac{\lambda^2}{l_t}$$

Bei einer Kohärenzlänge von 30 km eines Laserstrahls der Wellenlänge 0,6 µm wäre das Verhältnis $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 2 \cdot 10^{-11}$ ausgeprägt monochromatisch. Das Sonnenlichtes[5] dagegen zeigt bei dieser Wellenlänge das Verhältnis $\frac{\Delta\lambda}{\lambda} = 0{,}2$, ist also sehr breitbandig. Für Anwendungen in der industriellen Materialbearbeitung spielt die Monochromasie allerdings eine untergeordnete Rolle.

2.2 EIGENSCHAFTEN DES LASERSTRAHLS

Ein Laserstrahl wird im Resonator geformt und aus dem Laser ausgekoppelt, so dass er für Anwendungen verfügbar ist. Er ist gekennzeichnet durch seine

- **Wellenlänge** (verbunden mit einer Bandbreite der Wellenlänge), durch seine
- **Leistung**, die er mit sich führt, durch die
- **Verteilung** der Leistung über seinen Querschnitt, durch die
- **geometrische Form** des Querschnitts, durch die
- **Zeit**, die er existiert, durch seine
- **Durchmesser** (oder Strahlabmessungen), durch seine
- **Divergenz** und durch die
- **Änderung** seiner Eigenschaften entlang des Strahlweges.

Für Anwendungen in der Materialbearbeitung werden zwei Typen von Laserstrahlen betrachtet: Laserstrahlen aus **stabilen Resonatoren**, das sind **Gaußstrahlen**, und Laserstrahlen aus **instabilen Resonatoren**, das sind alle anderen Laserstrahlen. Sie unterscheiden sich wesentlich bezüglich der Änderungen ihrer Eigenschaften entlang des Strahlweges. Gaußstrahlen lassen sich einfacher beschreiben, da sich ihre Charakteristik in Ausbreitungsrichtung nicht verändert. Das gilt insbesondere für die Leistungsverteilung über den Querschnitt. Diese ändert sich entlang des Strahlweges nicht. In Laserstrahlen aus instabilen Resonatoren dagegen hängt die Bestrahlungsstärke-Verteilung dagegen vom Ort auf dem Strahlweg ab – so wie in gewöhnlichen Strahlenbündeln.

Allen Laserstrahlen gemeinsam ist, dass sie weder aus einem Punkt kommen können noch ein Bündel paralleler Strahlen darstellen. Das besagt die Unschärferelation. Sie haben aber immer eine engste Stelle, die **Strahltaille**, sowie eine Divergenz, das heißt, der Strahldurchmesser ändert sich entlang seines Strahlweges.

2.2.1 GAUßSTRAHLEN

Für die meisten Lasertechnischen Materialbearbeitungsaufgaben kommen Gaußstrahlen zum Einsatz. Diese vereinen zusätzliche Vorteile von Laserstrahlen im Vergleich zu anderen Strahlen. Gaußstrahlen werden in **stabilen Resonatoren** eines Lasers erzeugt. [6]

Zunächst zum Begriff **Laserresonator**. Ein Laserresonator ist ein **optischer Resonator**, in dem sich außerdem noch ein Verstärkungsmedium befindet. Er enthält eine optische Einrichtung zum **Auskoppeln** des Laserstrahls.

Ein optischer Resonator wird dann als stabil bezeichnet, wenn außerhalb der optischen Achse weitere Strahlwege existieren, auf denen der Strahl den Resonator nicht verlässt. Das ist im einfachsten Fall eine geschlossene Schleife einer Lichtleitfaser. Damit ist ein Ringresonator aufgebaut. Ein Ringresonator kann auch über (mindestens) drei Spiegel in geeigneter Anordnung aufgebaut sein. Für Aufgaben in der Materialbearbeitung sind lineare Resonatoren üblich. Diese enthalten zwei gegenüberliegende Spiegel, beispielsweise Kugelspiegel. Bei geeigneter Auswahl der Spiegel gibt es Strahlwege auch außerhalb der optischen Achse, auf denen der Strahl den Resonator nicht verlässt, obwohl er unter einem Winkel zur optischen Achse verläuft, wie im Beispiel des eines konfokalen Resonators, Bild 3. Hier fallen die Brennpunkte beider Spiegel zusammen. Alle Strahlen (hier im mathematischen Sinn), die in diesem Beispiel durch den Brennpunkt eines Spiegels verlaufen, werden nach Reflexion zu Parallelstrahlen, diese nach der nächsten Reflexion wieder zu Brennstrahlen, verlassen also den Resonator nicht. Der Resonator ist somit stabil. Der ausgekoppelte Laserstrahl (in diesem Beispiel wird der Laserstrahl durch einen teiltransparenten Resonatorspiegel aus dem Resonator ausgekoppelt) setzt sich somit aus Teilstrahlen unterschiedlicher Richtungen zusammen. Das führt zu Überlagerungen der Wellenfronten (Interferenzen) und somit zu einer transversalen Modulation der Bestrahlungsstärke-Verteilung, das heißt zu einer höheren **transversalen Modenordnung**[7], in diesem Beispiel eine transversale Modenordnung mit Spiegelsymmetrie. Ein rotationssymmetrischer Verlauf der Strahlwege ist ebenso möglich, Bild 4. Hier wird ein Strahl eines Zeigelasers in einen Resonator aus einem Planspiegel und einem Kugelspiegel (R = 2,5 m) im Tabakrauch sichtbar. Der Strahl wird

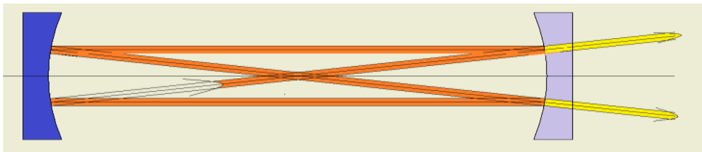


Bild 3: Beispiel für den Verlauf eines ausgewählten Strahlwegs im konfokalen Resonator, stabiler Grenzfall

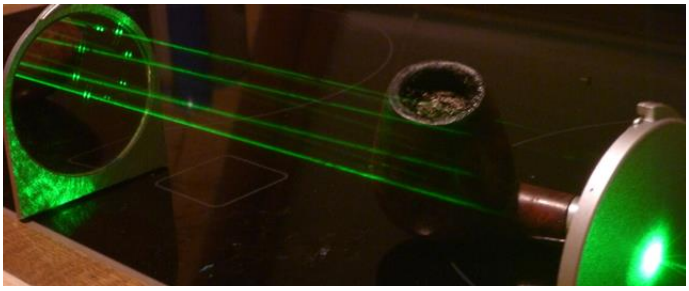


Bild 4: Resonatormodell mit rotationssymmetrischem Strahlverlauf Hier wird ein Strahl eines Zeigelasers in einen Resonator aus einem Planspiegel und einem Kugelspiegel (R = 2,5 m) im Tabakrauch sichtbar. Der Strahl wird durch eine Bohrung in den Resonator eingeführt und reproduziert sich nach acht Umläufen. Er verlässt den Resonator also nie. Daher ist dieser stabil

durch eine Bohrung in den Resonator eingeführt und reproduziert sich nach acht Umläufen. Er verlässt den Resonator also nie. Daher ist dieser stabil.

Gaußstrahlen höherer transversaler Modenordnung haben eine **Invariante**[8] , die größer ist als die Untergrenze aus der **Unschärferelation**[9]; denn sie werden mit Strahlverläufen außerhalb der optischen Achse generiert.

Lineare Resonatoren können ebenfalls aus Fasern aufgebaut sein, deren Enden verspiegelt sind. In diesen werden die transversalen Eigenschaften des Strahls wesentlich über das Verhältnis zwischen dem Kerndurchmesser der Faser zur Wellenlänge der Strahlung bestimmt.

Neben der transversalen Modenordnung geht auch die **longitudinale Modenordnung** in die Beschreibung eines Gaußschen Laserstrahls ein. Das ist die Anzahl der Wellenlängen, die in einen Umlauf eines Wellenzuges in den Resonator passen. In Anwendungen für die industrielle Materialbearbeitung ist die longitudinale Modenordnung nahezu ohne Bedeutung. Lediglich kurzzeitige Sprünge in der Ordnungszahl machen sich bei einigen Anwendungen mit bestimmten Lasern im Bearbeitungsergebnis bemerkbar. Auf die longitudinale Modenordnung wird daher hier nicht weiter eingegangen.

2.2.1.1 Transversale Modenordnung

Grundeigenschaft eines (stabilen) Resonators ist die, dass er ein Schwingungsfeld reproduziert. Dies ist auch in optischen Resonatoren der Fall, also für elektromagnetische Wellen. Diese passen nach einem Umlauf im Resonator mit einer ganzzahligen Anzahl der Wellenlänge in den Umlaufweg (doppelte Resonatorlänge). Die Anzahl wird „longitudinale Modenordnung" genannt. Da elektromagnetische Wellen senkrecht zur Ausbreitungsrichtung zweidimensional ausgedehnt sind, erfordert das „Reproduzieren des Wellenfeldes" zusätzlich, dass auch die Feldverteilung quer zur Ausbreitung zweidimensional reproduziert wird. Im einfachsten Fall ist das Feld quer zur Ausbreitung in beiden Dimensionen gaußverteilt. Dieser einfachste Fall wird transversaler Grundmode genannt, Bild 5.

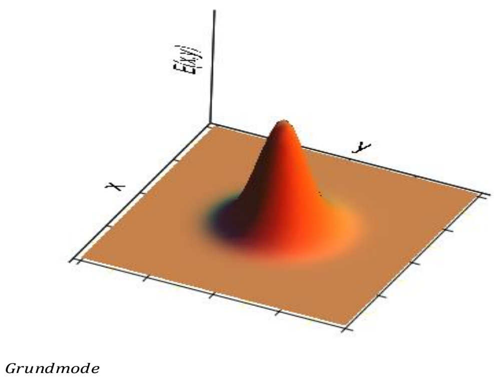


Bild 5: Feldverteilung im transversalen Grundmode eines Laserstrahls

Weitere Feldverläufe, die auch in beliebig vielen Umläufen reproduziert werden, sind über Polynome beschreibbar: Hermite-Polynome bestimmen die Feldverteilung bei Spiegelsymmetrie in Hermite-Gaußstrahlen, Bild 6, und Laguerre-Polynome die der rotationssymmetrischen Laguerre-Gaußstrahlen, Bild 7. In diesen Darstellungen wurde eine der beiden orthogonalen Dimensionen ausgewählt. In Hermite-Gauß-Strahlen nimmt die zweite Dimension ebenfalls eine Hermite-Gauß- Funktion ein. Diese ist unabhängig von der ersten. In den rotationssymmetrischen Laguerre-Gauß-Strahlen moduliert die Ordnung der zweiten Dimension die Feldstärke in Umfangrichtung.

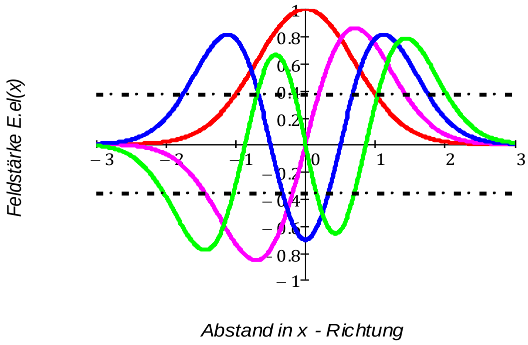


Bild 6: Feldverteilung in transversalen Hermite-Gauß-Moden der Ordnung TEM_{00} bis TEM_{04} (rot, violett, blau, grün) in der *x* –Strahlachsen– Ebene. Die Feldstärke ist normiert auf das Grundmode-Maximum. Die Anzahl der Nulldurchgänge entspricht der Polynom-Ordnung und zeigt die Modenordnung in der Ebene an.

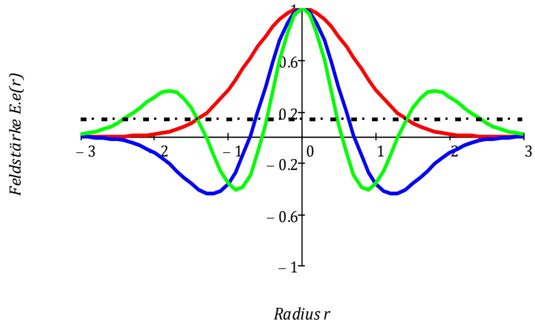


Bild 7: Feldverteilung in transversalen Laguerre-Gauß-Moden der Ordnung TEM_{00} bis TEM_{02} (rot, blau, grün) in einer Radius – Strahlachsen – Ebene. Die Feldstärke ist normiert auf das Grundmode-Maximum. Die Anzahl der Nulldurchgänge entspricht der Polynom-Ordnung und zeigt die Modenordnung in der Ebene an.

Durch Quadrieren und Normieren der Feldstärkefunktionen ergibt sich die Verteilung der Bestrahlungsstärke[10]. Der Strahl wird breiter, das Maximum der Bestrahlungsstärke verschiebt sich in Hermite-Moden mit höherer Ordnung nach außen, Bild 8. In Laguerre-Moden bleibt das Maximum mit der Bestrahlungsstärke des Grundmodes im Zentrum des Strahles. Die Verbreiterung des Gesamtstrahls erfolgt auf Kosten des inneren Bereichs. Dieser wird schmaler, Bild 9.

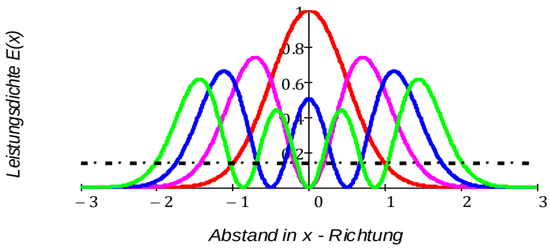


Bild 8: Verlauf der Leistungsdichte in spiegel-symmetrischen transversalen Hermite-Gauß-Moden der Ordnung TEM_{00} bis TEM_{04} (rot, violett, blau, grün)und $E(x) = 1/e^2$ in der Ebene x – Strahlachse, normiert ist auf gleiche $\int E\,dx$ wie im Grundmode. Die Anzahl der Minima in eine Radiusrichtung zeigt die Modenordnung in der Ebene an.

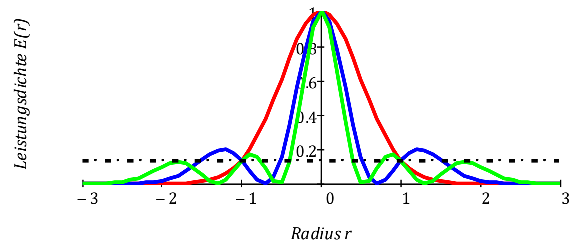


Bild 9: Verlauf der Leistungsdichte in rotations-symmetrischen transversalen Laguerre-Gauß-Moden der Ordnung TEM_{00} bis TEM_{20} (rot, blau, grün) und $E(r) = 1/e^2$ in der Ebene r – Strahl-achse, normiert auf gleiche Leistung *P*, : $P(r) = 2\pi \int r \cdot E(r)\,dr$. Die Anzahl der Minima zeigt die Modenordnung in der Ebene an.

Einen Eindruck zur Verteilung der Bestrahlungsstärke im Querschnitt von Laserstrahlen mit niedriger Modenordnung vermitteln die Berechnungen in Bild 10 und Bild 11.

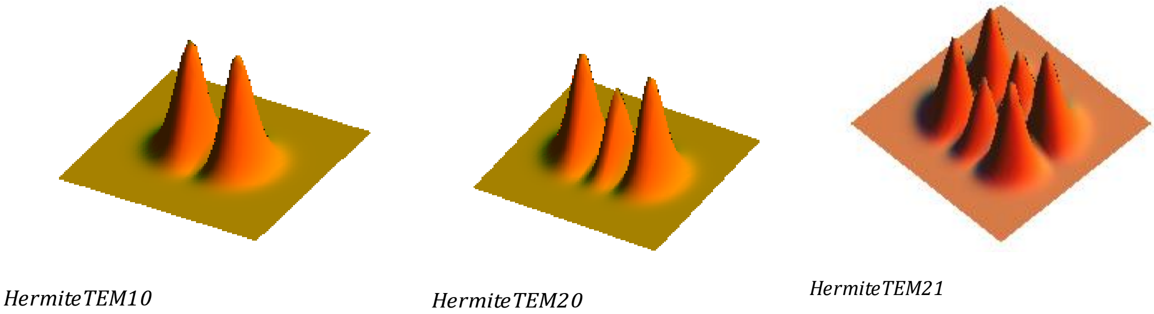


Bild 10: Leistungsdichteverteilung in Hermitemoden TEM_{01}, TEM_{02} und TEM_{21}

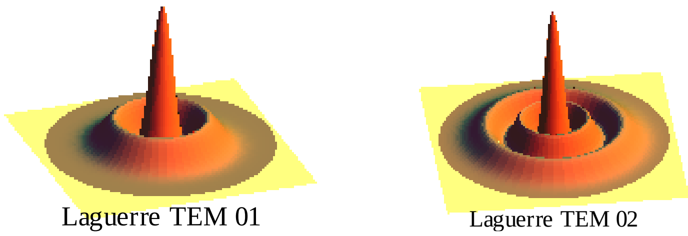


Bild 11: Leistungsdichteverteilung in Laguerremoden TEM_{01} und TEM_{02}. Der erste Index 0 bedeutet, dass keine Modulation im Umfang auftritt

Die hier gezeigten Moden können sich in Laserstrahlen überlagern oder auch mit hoher Frequenz wechseln, so dass der zeitliche Mittelwert wahrgenommen wird. Eine besondere Überlagerung von Hermite-Moden wird in einigen Anwendungen zur Materialbearbeitung gezielt ausgewählt: die Überlagerung eines Hermite-Modes der Ordnung TEM_{01} mit dem Hermite-Mode TEM_{10}, Bild 12. Hierin überlagern sich zwei orthogonal orientierte Moden gleicher Ordnung, die in Addition der Bestrahlungsstärke zu einem Ring führen. Derartige Überlagerungen werden in der Indizierung mit einem Stern gekennzeichnet und Ringmode genannt. Das Beispiel zeigt den Mode TEM_{01}*.

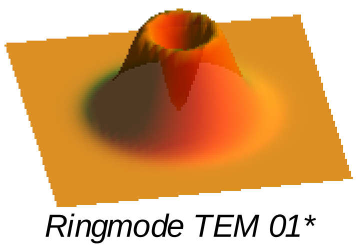


Bild 12: Ringmode aus der Überlagerung der Transversalmoden TEM_{01} mit TEM_{10}

2.2.1.2 Verstärkungsmedium:

Ein Verstärkungsmedium ist ein Stoff (freie Elektronen; gasförmig; flüssig; fest), in welchem elektromagnetische (optische) Strahlung verstärkt werden kann, in der Regel dadurch, dass die Lebensdauer eines oberen (optischen) Energieniveaus in dem Stoff größer ist als die eines darunter liegenden. Dadurch wird Besetzungsinversion und somit eine Verstärkung möglich, wie Einstein 1917 zeigte.

2.2.1.3 Auskopplung

Ein Laserstrahl verlässt den Resonator über eine besondere optische Einrichtung. Bei den meisten Lasern zur Verwendung in der Materialbearbeitung wird dadurch ausgekoppelt, dass einer der Resonatorspiegel teiltransparent ausgelegt ist. Kurze Pulse werden auch durch schnell geschaltete Einrichtungen unterschiedlichster Art (auch Schall-Beugungsgitter) ausgekoppelt.

2.2.2 ANDERE STRAHLEN

Laser mit sehr hohen Leistungen verwenden auch **instabile Resonatoren** und koppeln den Strahlanteil aus, der an einem Resonatorspiegel seitlich auswandert, Bild 13. Ein Vorteil dieser instabilen Resonatoren ist der, dass die in den Resonator eingebrachte Leistung aus dem ganzen Volumen zum Aufbau des Laserstrahls beiträgt. Zum anderen liegt im Resonator selbst kein engster Strahlquerschnitt, in dem dann bei hohen Leistungen die sehr hohen Bestrahlungsstärken Komponenten des Resonators beschädigen oder zerstören würden.

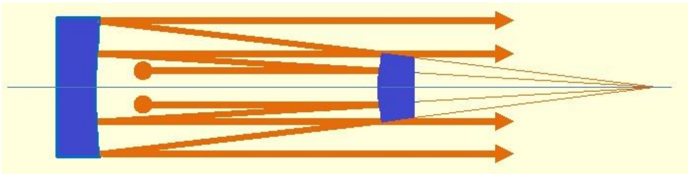


Bild 13: Instabiler Resonator, Beispiel für den Verlauf ausgewählter Strahlwege im konfokalen Resonator, instabiler Grenzfall

Nachteilig bei Strahlen aus instabilen Resonatoren ist, dass sich entlang des Strahlverlaufes die Art der Leistungsverteilung ändert. Direkt vor dem Resonatorausgang ist die Leistung im rotationssymmetrischen Strahl ringförmig um die Strahlachse verteilt. Weit entfernt dagegen, im „Fernfeld“ liegt in der Stahlachse ein Maximum der Bestrahlungsstärke vor, umgeben mit ringförmigen Bereichen geringerer Bestrahlungsstärke. Physikalisch (mathematisch) betrachtet stellt das „Fernfeld“ die Furier-transformierte Bestrahlungsstärkeverteilung des Strahlquerschnitts am Ausgang dar. Ein weiterer Nachteil ist, dass sich mit der Strahlleistung am Resonatorausgang die Ringbreite und die Verteilung der Bestrahlungsstärke im Ring ändern. Damit ändert sich auch die Bestrahlungsstärkeverteilung im „Fernfeld“ abhängig von der Strahlleistung. Ein „Fernfeld“ liegt auch im Fokus hinter einer Fokussieroptik vor.[11]

Aus diesem Grunde werden Strahlen aus instabilen Resonatoren für Anwendungen in der industriellen Materialbearbeitung nur dann verwendet, wenn sehr hohe Leistungen gefordert sind. Dafür wurden bereits Laser mit 90 kW kontinuierlicher Strahlleistung eingesetzt. Eine besondere Ausführung von Hochleistungslasern verwendet Resonatoren, die in einer Querrichtung (der Strahlquerschnitt ist zweidimensional) stabil und in der anderen instabil ausgelegt sind. Damit wird eine hohe Strahlleistung mit Eigenschaften der stabilen Resonatoren verbunden.

2.2.3 LASERSTRAHLDURCHMESSER

Laserstrahlen sind nicht scharf begrenzt wie Drähte oder Wasserstrahlen. In einem **Grundmode**-Laserstrahl[12] beispielsweise verteilen sich die Leistungsanteile über den Strahlquerschnitt symmetrisch zur Strahlachse entsprechend einer Gaußschen Glockenkurve. Diese strebt erst im unendlichen Abstand von der Achse gegen null. Der Laserstrahl ist daher unscharf begrenzt.

Da der Strahlquerschnitt zweidimensional ist und im Allgemeinen nicht kreisrund, sind zudem zwei Angaben für die Beschreibung seiner Ausdehnung nötig. Diese werden dann **Strahlabmessungen** genannt. Nur im Spezialfall des rotationssymmetrischen Strahlquerschnitts reicht die Angabe **eines** Strahl-Durchmessers aus. Der Übersichtlichkeit wegen werden in diesem Kapitel zunächst rotationssymmetrische Stahlquerschnitte betrachtet.

Wegen der unscharfen Begrenzung der Laserstrahlen werden die Durchmesser über ihre „physikalischen Größen“ definiert. Hierzu werden besondere Kriterien ausgewählt, wie eine bestimmte Bestrahlungsstärke, oder auch der Leistungsanteil, der durch einen begrenzenden Querschnitt oder durch begrenzende Abmessungen hindurchfließt.

Zunächst zur **Bestrahlungsstärke**. Diese physikalische Größe wird im Gebiet der Optik als Bestrahlungsstärke *E* definiert, da der Begriff Dichte auf das Volumen bezogen genormt war. In der Lasertechnik wird der Begriff Bestrahlungsstärke als Flächen-bezogene Größe verwendet. Falls Verwechslungen mit dem gleichen auf das Volumen bezogenen Begriff möglich sind, wird der Bezug zusätzlich angegeben. Die Bestrahlungsstärke *E* ist definiert als Quotient des Leistungsanteils ∂P, der durch ein Flächenelement ∂A normal hindurchtritt:

$$\boldsymbol{E = \frac{\partial P}{\partial A}} \tag{2}$$

Ausgang für eine Definition des Durchmessers ist der rotationssymmetrische Grundmode-Laserstrahl. Dies ist ein ausgezeichneter Laserstrahl, nämlich derjenige, der die untere Grenze der **Heisenbergschen Unschärferelation**[13] erreicht. In ihm ist die Bestrahlungsstärke über den Querschnitt gaußförmig verteilt. Zunächst zur Gaußverteilung: Die Funktion einer Gaußverteilung in einfachster mathematischer Form in einer x-y-Ebene ist:

$$\boldsymbol{y = y_0 \cdot e^{-\frac{x^2}{a^2}}} \tag{3}$$

wobei *a* der Parameter dieser Gaußfunktion ist und y_0 das Maximum bei *x* = 0. Der Parameter *a* zeigt die Breite der Gaußschen Glockenkurve im Verhältnis zur Höhe an. Gleichung (3) zeigt, dass die Höhe der Kurve bei *x* = *a* den Betrag 1/e des Maximums annimmt, Gleichung (4).

$$\boldsymbol{y_a = \frac{1}{e} \cdot y_0} \tag{4}$$

Übertragen auf physikalische Größen eines rotationssymmetrischen Laserstrahls verläuft die Amplitude der elektrischen Feldstärke E_{el} entsprechend der Gaußfunktion. Diese ist dann für rotationssymmetrische Verteilung im Polarkoordinatensystem *(r, φ)*

$$\boldsymbol{E_{el} = E_{el,0} \cdot e^{-\frac{r^2}{a^2}}} \tag{5}$$

wobei *r* den Radius bezeichnet und *a* den Strahlparameter. Diese elektrische Feldstärke ist wegen der hohen Frequenzen der optischen Strahlung nur schwer messbar und wird daher auf die Bestrahlungsstärke *E* transformiert ($E \propto {E_{el}}^2$, Gleichung (1)). Somit beschreibt sich die Verteilung der Bestrahlungsstärke *E* im Strahl über ein Quadrieren der Gleichung (5) zu

$$E = E_0 \cdot e^{-2\frac{r^2}{a^2}} \quad (6)$$

Der Anteil des konstanten Terms aus Gleichung (1) geht in E_0 ein. Aufgrund der Quadrierung bezeichnet a den Ort im Strahl, auf dem die Bestrahlungsstärke auf $1/e^2$ des Maximums in der Strahlachse abgesunken ist, Gleichung (7) und Bild 13. Der Strahldurchmesser d ist damit $d = 2a$.

$$\boldsymbol{E_a = \frac{1}{e^2} \cdot E_0} \quad (7)$$

Allerdings sollte beachtet werden, dass in theoretischen Ableitungen zur Beschreibung eines Laserstrahls auch andere Durchmesser-Definitionen verwendet werden. So hat Heisenberg in seiner Unschärferelation den Wendepunkt der Gaußverteilung betrachtet. Der Unschärferelation lag die Wahrscheinlichkeitsrechnung zugrunde. Der Wendepunkt definiert die Standardabweichung σ. Weitere noch übliche Durchmesser-Definitionen sind: "Halbwertdurchmesser", der "Durchmesser im Wendepunkt" ($2 \cdot \sigma$), der "1/e - Durchmesser" und der "$1/e^2$ - Durchmesser", Bild 14.

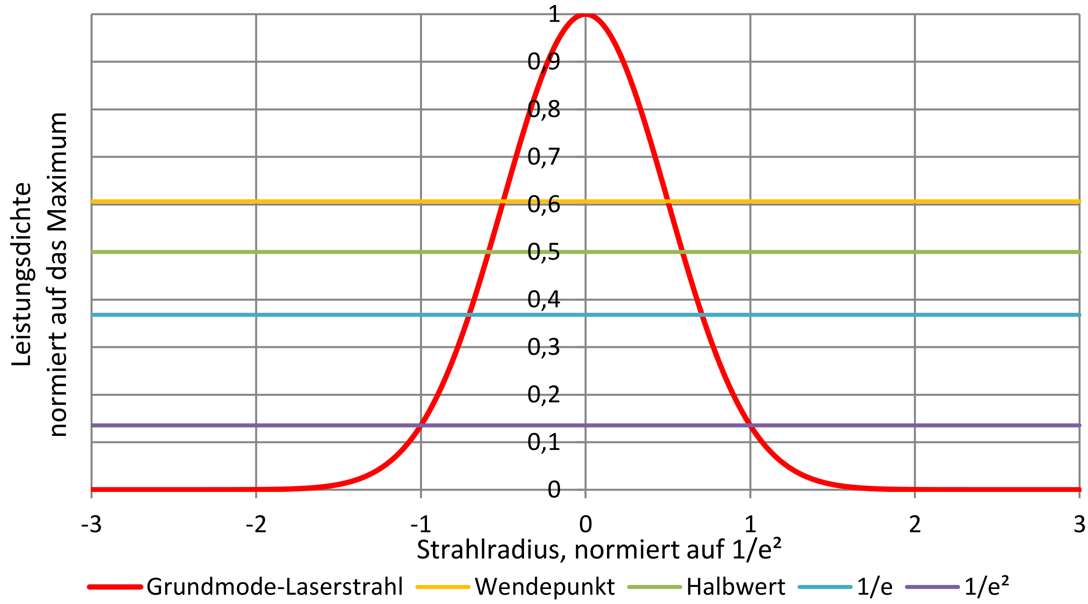


Bild 14: Zur Umrechnung unterschiedlicher Durchmesserbezüge in einem Grundmodelaserstrahl. Die Breite der Gaußschen Glockenkurve ist auf den "$1/e^2$-Wert" und die Leistungsdichte auf das Maximum normiert. Die Geraden kennzeichnen die normierten Leistungsdichten für die unterschiedlichen Durchmesser-Definitionen.

Diese Durchmesser lassen sich wie folgt umrechnen, Tabelle 1:

Tabelle 1: Umrechnung von gebräuchlichen Durchmesser-Definitionen

Durchmesser 1/e²	$r_{e^{-2}} = a$	d
Durchmesser im Wendepunkt	$r_w = \sigma = \frac{a}{2}$	$d_w = 2\sigma = \frac{d}{2}$
Halbwertdurchmesser	$r_h = a\sqrt{\frac{1}{2}\ln(2)}$	$d_h = d\sqrt{\frac{1}{2}\ln(2)} = 0{,}589 \cdot d$
1/e - Wert	$r_{e^{-1}} = \frac{a}{2}\sqrt{2}$	$d_e = \frac{d}{2}\sqrt{2} = 0{,}707 \cdot d$

Für andere Gaußstrahlen[14], das sind Laserstrahlen aus stabilen Resonatoren mit nicht gaußförmiger Verteilung der Bestrahlungsstärke (Laserstrahlen mit einer höheren Ordnung von Transversalmoden), wird ein Durchmesser ebenfalls auf den Wert 1/e² der Bestrahlungsstärke bezogen. Allerdings ist eine derartige Definition dann unsicher, wenn die Randbereiche flach abfallen, wie in höheren Laguerre-Moden[15], Bild 15.

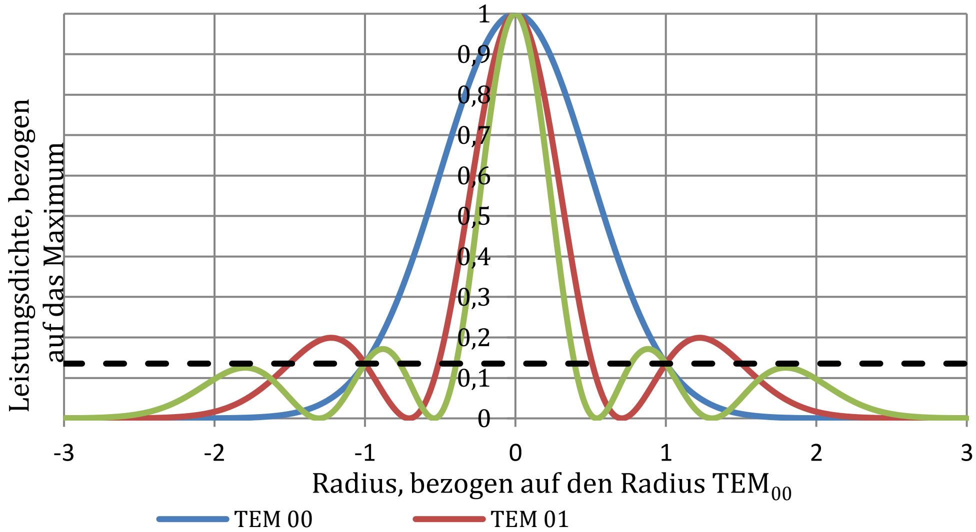


Bild 15: Verlauf der Leistungsdichte in rotationssymmetrischen Laserstrahlen der Modenordnung Laguerre TEM_{01} und TEM_{02} im Vergleich zum Grundmode, Normierung auf die Gesamtleistung eines rotationssymmetrischen Strahls; zur Durchmesser-Bestimmung ist die Leistungsdichte $E_{grenz} = E_0/e^2$ eingetragen. Diese zeigt für die höheren Modenordnungen jeweils mehrere Durchmesser an. Sie ist nicht eindeutig und sollte hier nicht gewählt werden.

Für diese Modenordnungen könnte die erste Nullstelle als Durchmesserangabe gewählt werden. Dies wäre vorteilhaft für Bearbeitungsaufgaben, bei denen die Bestrahlungsstärke maßgeblich ist.

Für andere Aufgaben in der Materialbearbeitung steht der Leistungseintrag (aus der Energiebilanz) im Vordergrund. In diesem Fall wäre beispielsweise bei höheren Modenordnungen die Angabe eines Durchmessers allein nur selten ausreichend. So würde beispielsweise mit einem Laguerre TEM_{02} Mode, siehe Bild 15, der recht erhebliche Leistungsanteil außerhalb der ersten Nullstelle nicht berücksichtigt.

In diesem Fall ist es sicherer, wenn der Durchmesser über den Leistungsanteil bestimmt wird, der innerhalb eines ausgewählten Querschnittes fließt. Dieser Leistungsanteil wird dabei so gewählt, dass er mit der Definition des Durchmessers über die Bestrahlungsstärke bei Gauß-verteilung übereinstimmt. Die Entsprechung errechnet sich aus der Definition der Bestrahlungsstärke: $E = \frac{\partial P}{\partial A}$.

Durch Integration der Bestrahlungsstärke über den ausgewählten Strahlquerschnitt ist somit die Leistung *P* bekannt, welche durch diesen Querschnitt begrenzt wird. Diese berechnet sich bei Rotationssymmetrie zu

$$P = \int_0^{\infty} 2 \cdot \pi \cdot r \cdot E(r)\, dr \qquad (8)$$

Und mit Gleichung (6) wird daraus Gleichung (9)

$$P = 2 \cdot \pi \cdot E_0 \cdot \int_0^{\infty} r \cdot e^{-2 \cdot \frac{r^2}{a^2}}\, dr \qquad (9)$$

Integriert wird von null bis unendlich; damit wird hier die **Gesamtleistung** des rotationssymmetrischen Laserstrahls erfasst. Innerhalb des Durchmessers *d* (*d* = 2 *a*) fließt lediglich der **Leistungsanteil P_a**. Für diesen wird nur bis zur Obergrenze *a* integriert.

$$P_a = 2 \cdot \pi \cdot E_0 \cdot \int_0^{a} r \cdot e^{-2 \cdot \frac{r^2}{a^2}}\, dr \qquad (10)$$

Das Verhältnis $\boldsymbol{P_a/P}$ beträgt dann im Grundmode-Laserstrahl 0,865, Gleichung (11).

$$\frac{P_a}{P} = \frac{2 \cdot \pi \cdot E_{max} \cdot \int_0^{a} r \cdot e^{-2 \cdot \frac{r^2}{a^2}}\, dr}{2 \cdot \pi \cdot E_{max} \cdot \int_0^{\infty} r \cdot e^{-2 \cdot \frac{r^2}{a^2}}\, dr} = 1 - \frac{1}{e^2} = 0.865 \qquad (11)$$

$$P_a = (1 - e^{-2}) \cdot P = 0{,}865 \cdot P \qquad (12)$$

Somit lässt sich in rotationssymmetrischen Strahlen mit Gauß-verteilter Bestrahlungsstärke der $1/e^2$-Durchmesser über den Leistungsanteil ermitteln, der konzentrisch zur Strahlachse

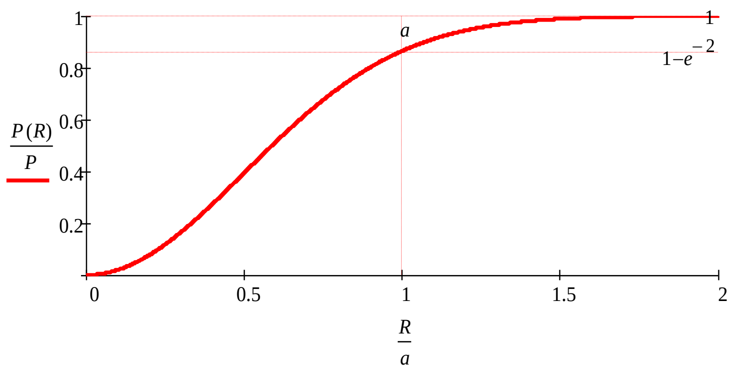


Bild 16: Berechnung des Leistungsanteils P(R), der durch einen rotationssymmetrischen Grundmode-Laserstrahl innerhalb eines Radius R fließt. Die $1/e^2$ - Grenze ist eingezeichnet. Sie schneidet die Leistungskurve beim$1/e^2$ - Durchmesser (Radius a) und zeigt den Leistungsanteil $1-1/e^2 = 0{,}865$ an.

innerhalb einer Kreisblende hindurchtritt, Bild 16.

Von zusätzlichem Interesse ist die Bestrahlungsstärke E_0 im Zentrum bei bekannter Leistung P und bekanntem Durchmesser d des Strahls. Aus der Gaußverteilung eines rotationssymmetrischen Strahlquerschnitts errechnet sich diese aus Gleichung (9) wie folgt:

$$E_0 = \frac{P}{2\cdot\pi\cdot\int_0^\infty r\cdot e^{-2\cdot\frac{r^2}{a^2}}\,dr} = 2\cdot\frac{P}{\pi\cdot a^2} = 2\cdot\frac{P}{\frac{\pi}{4}\cdot d^2} \qquad (13)$$

$\pi \cdot a^2$ oder $\frac{\pi}{4}\cdot d^2$ ist der Kreisquerschnitt innerhalb des Durchmessers d. Die Bestrahlungsstärke im Zentrum entspricht somit der doppelten mittleren Bestrahlungsstärke, welche die Gesamtleistung auf den Querschnitt innerhalb des Durchmessers d bezieht, Gleichung (14).

$$E_0 = 8\cdot\frac{P}{\pi\cdot d^2} \qquad (14)$$

Für die höheren rotationssymmetrischen transversalen Modenordnungen, siehe Bild 14, errechnet sich der Leistungsanteil entsprechend, Bild 17. Hier sind die Ordnungen Laguerre TEM_{00}, TEM_{01} und TEM_{02} dargestellt sowie die 0,865-Anteil-Gerade $(1-e^{-2})$.

Ein Vergleich dieser über die Leistung ermittelten Durchmesser führt zur Näherungsformel für höhere Laguerre-Modenordnungen TEM_{0n} $d = M\cdot d_{TEM00}$, wobei $M=\sqrt{2n+1}$

Diese Übereinstimmung ist grob, Bild 17, ($\sqrt{3}=1{,}732$; $\sqrt{35}=2{,}236$; $\sqrt{7}=2{,}646$)

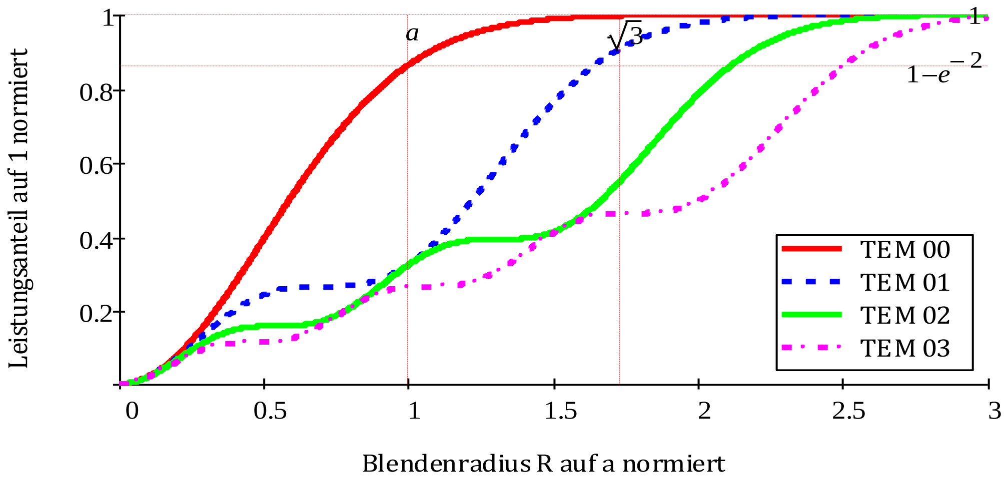


Bild 17: Verlauf des Leistungsanteils in rotationssymmetrischen Laserstrahlen der Modenordnung TEM_{00}, Laguerre TEM_{01} TEM_{02} und TEM_{03}, Normierung der Leistung jeweils auf die Gesamtleistung. Zur Durchmesserbestimmung ist der Leistungsanteil 0,865 eingetragen.

Das Messen von Strahldurchmessern über eine Kreisblende erfordert einen hohen Aufwand, da im ersten Schritt die Kreisblende in zwei Dimensionen auf die (nicht zugängliche unsichtbare) Strahlachse zentrierte werden muss. Leichter ist das Messen über eine lineare Blende, die quer durch den Strahl, beispielsweise in x-Richtung, geführt wird. Anfangs deckt sie den Strahl voll ab. Dann wird sie weitergeführt und mehr und mehr des Strahlquerschnitts freigegeben. Der Verlauf der Leistung hinter der Blende wird gemessen. Das Verfahren kommt insbesondere auch den Anforderungen aus mehreren industriellen Anwendungsfällen entgegen, bei denen der Laserstrahl in einer Linie über das Werkstück geführt wird.

Für die physikalische Betrachtung legt eine lineare Blende Berechnungen in **kartesischen Koordinaten** nahe. In einem rotationssymmetrischen Laserstrahl mit gaußförmiger Verteilung der Bestrahlungsstärke wird dazu die Gesamtleistung *P* somit durch Integration der Bestrahlungsstärke über die gesamte Ebene (in *x*- und *y*-Richtung) ermittelt, Gleichung (15)

$$P = E_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\cdot\left(\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)} \, dx \, dy \tag{15}$$

Wird hierin E_0 substituiert (aus Gleichung (14)), so nimmt der Leistungsanteil *P(X)*, der an der linearen Blende vorbei bis zur Position *X* fließt, stetig zu, Gleichung (16) mit Bild 18.

$$P(X) = \frac{8\cdot P}{x\cdot d^2} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{X} e^{-2\cdot\frac{x^2+y^2}{a^2}} \, dx \, dy \tag{16}$$

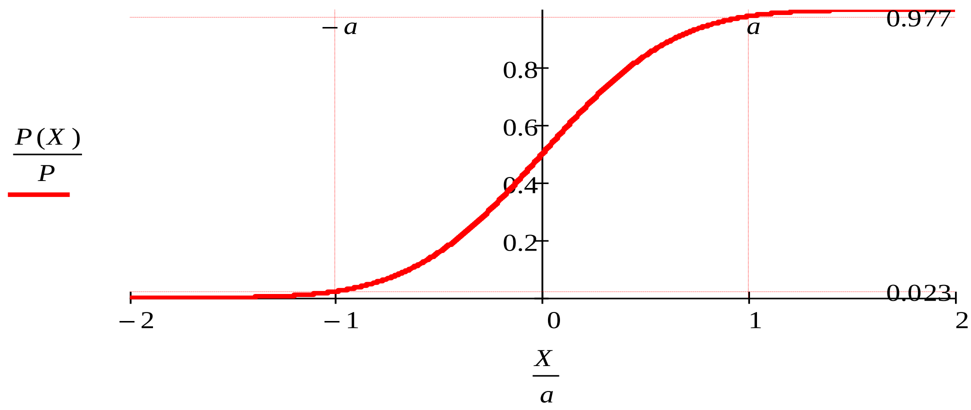


Bild 18: Anteil der Leistung eines rotationssymmetrischen Grundmodestrahls, der an einer in y-Richtung unendlich ausgedehnten linearen Blende vorbei bis zur Position X durch den Strahl verläuft, normiert auf den Strahlparameter *a*

Damit ist ein Weg beschrieben, den Stahldurchmesser über das Hindurchführen einer Schneide zu bestimmen: Von großem Abstand ausgehend, durch den Strahl hindurch gibt die Schneide an Position –*a* den Leistungsanteil $P_{-a}/P = 0{,}023$ frei, Gleichung (17)

$$\frac{\mathrm{P(d_y)}}{\mathrm{P}} = \frac{8}{\pi \mathrm{d}^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\mathrm{a}} \mathrm{e}^{-2\frac{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}^2}} \mathrm{dxdy} = 0{,}02275 \tag{17}$$

2,3 % der Leistung treten also in das Leistungsmessgerät. Mit weiterer Führung zur gegenüberliegenden Position +*a* der Strahlbegrenzung tritt der Anteil $P_a/P = 0{,}977$ (97,7 %) hindurch. Innerhalb einer Strahlabmessung also in den Grenzen -*a* bis +*a* verlaufen somit 0,954 (95,4 %) der Gesamtleistung, Gleichung (18).

$$\boldsymbol{\frac{P(d_y)}{P} = \frac{8}{\pi d^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-a}^{a} e^{-2\frac{x^2+y^2}{a^2}} dxdy = 0,9545} \tag{18}$$

Dies Messverfahren eignet sich insbesondere auch zur Beschreibung von nicht-rotationssymmetrischen Laserstrahlen. Die Strahlbegrenzungen werden dann **Strahlabmessungen** genannt. Gaußstrahlen mit höherer Hermite-Modenordnung TEM_{mn} sind im Allgemeinen nicht rotationssymmetrisch. Für deren Strahlabmessungen gilt die Näherung

$d_x = M \cdot d_{TEM\,00}$ mit $M = \sqrt{n+1}$.

Die jeweils verwendeten Definitionen des Durchmessers eines Laserstrahls werden auch zur Ermittlung der **Divergenz** des Laserstrahls angewandt. Diese Größe „Divergenz“ wird im Kapitel 2.3 Strahlausbreitung behandelt. Sie beruht auf der Bestimmung und somit auf der Definition von Durchmessern, ist aber nur im Zusammenhang mit der Strahlausbreitung, also über den Verlauf des Laserstrahls im Raum, verständlich.

2.2.3.1 Strahlabmessungen

Laserstrahlen müssen nicht rotationssymmetrisch verlaufen. Dies wird besonders deutlich, wenn die Bestrahlungsstärke-Verteilung im Strahlquerschnitt über transversale Hermite-Moden bestimmt wird. Von daher können in einem Strahlquerschnitt je nach Richtung unterschiedliche „Strahldurchmesser“ auftreten – auch im Grundmode mit Verteilung der Bestrahlungsstärke entsprechend Gaußschen Glockenkurven in zwei orthogonalen Querschnittsrichtungen. In diesem Fall hat der Strahl dann einen elliptischen Querschnitt mit einem minimalen und einem maximalen Durchmesser. Diese Durchmesser (Ellipsenachsen) stehen senkrecht aufeinander und werden Strahlabmessungen d_x und d_y genannt. Die Gesamtleistung ergibt sich analog zum rotationssymmetrischen Strahl aus der Bestrahlungsstärke-Verteilung.

Die beiden Strahlabmessungen d_x und d_y werden entweder aus der Bestrahlungsstärke bestimmt, als Abstand der im Strahl gegenüberliegenden Orte, auf denen die Bestrahlungsstärke $E = E_0 \cdot \frac{1}{e^2}$ beträgt oder über den Leistungsanteil, der innerhalb zweier linearer Begrenzungen hindurchtritt. Dieser ergibt sich analog zu Gleichung (16) und Bild 18, wenn anstelle des einen Parameters *a* die beiden Ellipsenparameter (Halbachsen) *a* und *b* betrachtet werden.

Die Gesamtleistung *P* im Strahl mit Gaußverteilung der Bestrahlungsstärke und der maximalen Bestrahlungsstärke E_0 im Zentrum ist analog zu Gleichung (15)

$$P = E_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} \, dy \, dx \tag{19}$$

Diese Integration der Bestrahlungsstärke über die gesamte Ebene, durch den Laserstrahl führt zur Gesamtleistung *P*

$$P = \frac{1}{2} \cdot \pi \cdot a \cdot b \cdot E_0$$

Also nimmt die zentrale Bestrahlungsstärke auch im elliptischen Querschnitt eines Strahls im Grundmode den doppelten Wert der mittleren Bestrahlungsstärke an (bezogen auf die Ellipse mit der Begrenzung *a* und *b*; die Fläche einer Ellipse ist $a \cdot b \cdot \pi$)

2.2.3.2 Messverfahren mit linearer Schneide

Zum Messen der Strahlabmessungen eines elliptischen Laserstrahls wird eine linear begrenzte Blende in Richtung der Hauptachsen (Minimal- oder Maximaldurchmesser) durch den Laserstrahl geführt. Diese ist senkrecht zur Bewegungsrichtung ausgedehnt ist und deckt den Strahl zunächst vollständig ab. Bei Führung in *x*-Richtung wird abhängig von der Position *X* der Leistungsanteil *P(X)* freigeben entsprechend

$$P(X) = E_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{X} e^{-2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)} dx\, dy \tag{20}$$

Die Lösung dieser Gleichung führt zu

$$P(X) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot E_0 \cdot a \cdot b \cdot \left(fehlf\left(\frac{X}{a} \cdot \sqrt{2} \right) + 1 \right) \tag{21}$$

Von Interesse ist nun die Frage nach dem Anteil der Leistung, die zwischen den Begrenzungen des Strahls –*a* und +*a* hindurchtritt. Dazu wird aus Gleichung (21) der Leistungsanteil für *x = a*

$$P(X = a) = \frac{1}{4} \cdot \pi \cdot E_0 \cdot a \cdot b \cdot \left(fehlf\left(\sqrt{2}\right) + 1 \right) \tag{22}$$

bestimmt:

Bezogen auf die Gesamtleistung ist das Verhältnis

$$\frac{P(X = a)}{P} = \frac{\frac{1}{4} \cdot \pi \cdot E_0 \cdot a \cdot b \cdot \left(fehlf\left(\sqrt{2}\right) + 1 \right)}{\frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot \pi \cdot E_0}$$

und somit

$$\frac{P(X = a)}{P} = \frac{1}{2} \cdot \left(fehlf\left(\sqrt{2}\right) + 1 \right) = 0.97725 \tag{23}$$

In der Blendenposition *X* = -*a* errechnet sich der Leistungsanteil entsprechend zu

$$\frac{P(X = -a)}{P} = \frac{1}{2} \cdot \left(fehlf\left(-\sqrt{2}\right) + 1 \right) = 0.02275 \tag{24}$$

Zwischen den Grenzen -*a* und +*a* verläuft der Leistungsanteil

$$\frac{P(X = a)}{P} - \frac{P(X = -a)}{P} = \frac{1}{2} \cdot \left(fehlf\left(\sqrt{2}\right) + 1 \right) - \frac{1}{2} \cdot \left(fehlf\left(-\sqrt{2}\right) + 1 \right) = fehlf\left(\sqrt{2}\right) = 0{,}9545 \tag{25}$$

das heißt, außerhalb der Strahlgrenzen -*a* und +*a* werden jeweils die Anteile **0,02275 (2,3 %)** ausgeblendet. Innerhalb der linearen Begrenzung an den Strahlabmessungen verlaufen somit $fehlf(\sqrt{2})$ = 0,9545 der Gesamtleistung. Das ist der gleiche Anteil, der im rotationssymmetrischen Strahlquerschnitt innerhalb des Durchmessers hindurchtritt, Gleichung (18). Die gleichen Betrachtungen gelten ebenso für die orthogonale Richtung mit dem Ellipsen-Parameter *b.*

2.2.4 Zusammenfassung der Aussagen zum Laserstrahldurchmesser und zu den Strahlabmessungen

Die in dieser Zusammenfassung verwendeten Bezeichnungen weichen zum Teil von den in DIN angegebenen ab, da in diesem Kapitel einfache nachvollziehbare physikalische Grundlagen verwendet werden.

In **rotationssymmetrischen** Strahlen wird der Durchmesser bestimmt

- über den Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Orten, in denen die Bestrahlungsstärke $1/e^2$ des Maximums beträgt
- über den Leistungsanteil $P_u = (1 - e^{-2}) \cdot P = 0{,}865 \cdot P$, der durch eine Kreisfläche um die Strahlachse mit dem Durchmesser d_u hindurchtritt. Hier ist u = 0,865 = 86 %, also $d_{86,5}$
- über einen ausgewählten Leistungsanteil P_u mit dem Index u, beispielsweise d_{50} für den Anteil 50 % der Gesamtleistung, dies entspricht bei Gaußverteilung dem Halbwertdurchmesser,
- Bei Messungen überlineare Blenden wird die Messrichtung indiziert, beispielsweise $d_{x,u}$, wobei mit x die Ausdehnung in *x*-Richtung indiziert wird und mit u = 0,954 bei Gaußverteilung der $1/e^2$-Bezug getroffen wird,
- durch weitere Angaben wie der Ort des ersten Minimums oder eines bestimmtes Maximums der Bestrahlungsstärke

In nicht rotationssymmetrischen Stahlquerschnitten werden **Strahlabmessungen** in zwei orthogonalen Richtungen minimaler und maximaler Ausdehnung bestimmt, wobei deren Richtungen durch Indices x und y gekennzeichnet sind,

- über den Abstand zwischen zwei gegenüberliegenden Orten in maximaler und minimaler Ausdehnung des Querschnitts, in denen die Bestrahlungsstärke $1/e^2$ des Maximums beträgt
- über den Leistungsanteil $P_u = 0{,}954 \cdot P$, der durch zwei lineare Begrenzungen im Abstand d_x oder d_y hindurchtritt, wobei außerhalb beider Grenzen jeweils die Anteile 0,023 verlaufen. Dies entspricht bei Gaußverteilung in beiden Fällen dem $1/e^2$-Wert, die Angabe ist dann beispielsweise $d_{x,95}$
- über einen ausgewählten Leistungsanteil P_u, der innerhalb der beiden linearen Grenzen hindurchtritt. Der Anteil wird im Index mit u in Prozent genannt, beispielsweise $d_{x,50}$ für den Anteil 0,5 der Gesamtleistung.
- durch weitere Angaben wie den Ort des ersten Minimums oder eines bestimmtes Maximums der Bestrahlungsstärke in zwei orthogonalen Richtungen mit minimaler und maximaler Ausdehnung

2.2.5 DIVERGENZ DES LASERSTRAHLS

Eine Eigenschaft aller Strahlenbündel – auch die von Laserstrahlen – ist die, dass kein Strahlenbündel durch einen einzigen Punkt laufen kann. Das ist gleichbedeutend mit der Aussage, dass kein Laserstrahl ausschließlich aus parallelen Strahlen (im Sinn der geometrischen Optik) aufgebaut sein kann. Ein Laserstrahl kommt somit weder aus einem Punkt, noch verläuft er in parallelen Grenzen. Die Abweichung von der Parallelität wird **Divergenz** genannt. Zu Beschreibung und Definition des Begriffes Divergenz von Laserstrahlen sind weitere Informationen nötig. Diese werden im nächsten Kapitel „2.3 Strahlausbreitung" beschrieben. Dort wird dann auch die Divergenz behandelt.

2.3 STRAHLAUSBREITUNG

Ein Laserstrahl verläuft innerhalb einer Einhüllenden, der Kaustik. Die Kaustik eines Bündels, deren Ursprung in einer Quelle in einer Ebene liegt, ist ein einschaliges Hyperboloid, im einfachsten Fall ein Rotationshyperboloid. Ein Hyperboloid wird in jeder Ebene, die längs der Strahlachse verläuft, über eine Hyperbel beschrieben, Bild 19. Im Hyperbelursprung liegt der engste Durchmesser d_0. Die engste Stelle des Laserstrahls wird Strahltaille genannt.

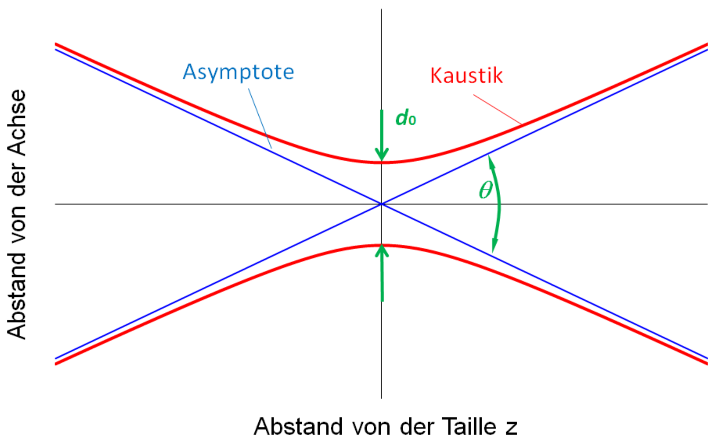


Bild 19: Kaustik eines Laserstrahls (rot) mit Asymptoten (blau), Taillendurchmesser d_0 und Divergenzwinkel θ

Liegt der Hyperbel-Ursprung im Ursprung des Koordinatensystems und ist die Hyperbel normal ausgerichtet, dann reichen zwei Parameter aus, um die Hyperbel eindeutig zu bestimmen. Zur Beschreibung von Laserstrahlen bieten sich deren Taillendurchmesser d_0 und deren Asymptotenwinkel θ als die beiden Parameter an. In großem Abstand zum Ursprung der Hyperbel (der Strahltaille) schmiegt sich die Hyperbel an die Asymptoten an. Der Strahldurchmesser nimmt dort proportional mit dem Abstand zu. Der **Winkel zwischen den Asymptoten** ist im Laserstrahl als **Divergenz** θ oder auch der Divergenzwinkel θ definiert.

In großen Abständen zur Stahltaille sind Berechnungen über die Asymptoten hinreichend genau. Die Gesetze der Geometrischen Optik reichen aus. In der Nähe der Strahltaille sind diese Gesetze nicht mehr gültig. Dort führen Hyperbelgleichungen zu korrekten Ergebnissen von Berechnungen.

Die Gleichung einer Hyperbel mit den Strahlparametern d_0 und θ in Ursprungsdarstellung ist:

$$\boldsymbol{d} = \sqrt{\boldsymbol{d_0}^2 + (\boldsymbol{\theta} \cdot \boldsymbol{z})^2}, \tag{26}$$

wobei *z* der Abstand vom Koordinatenursprung ist. Der Strahl läuft in positive *z*-Richtung. Abstände zum Ursprung werden dann als groß bezeichnet, wenn in der Hyperbelgleichung d_0 gegenüber $(\theta \cdot z)$ vernachlässigt werden kann, $d_0 \ll (\theta \cdot z)$. Dann ist $d(z) = \theta \cdot z$. Der Strahldurchmesser nimmt dort proportional zum Abstand zu.

Die **Divergenz** θ, also die Änderung der Strahldurchmesser im Strahlverlauf, ist mit der gewählten **Definition des Durchmessers** verbunden![16] Wenn die Strahlbegrenzung beispielsweise auf den Wendepunkt der Bestrahlungsstärke bezogen wird, dann sind beide Größen *d* und θ halb so groß wie im $1/e^2$-Bezug, Tabelle 1.

Mit den Parametern d_0 und θ ist die Ausbreitung eines Laserstrahls eindeutig festgelegt. Für weitere Betrachtungen sind zwei weitere Größen hilfreich: die Rayleighlänge z_R und die Strahlinvariante K_I. Die Rayleighlänge lässt sich über die Strahlparameter d_0 und θ definieren:

$$\boldsymbol{z_R} = \frac{\boldsymbol{d_0}}{\boldsymbol{\theta}} \tag{27}$$

Sie ist (wie aus der Hyperbelgleichung ableitbar) der Abstand von der Stahltaille, in dem der Strahldurchmesser den Betrag $\sqrt{2} \cdot d_0$ annimmt. Die Rayleighlänge gibt somit Auskunft darüber, wie „schlank“ der Laserstrahl ist.

Die zweite Größe, die **Strahlinvariante**, ist definiert als

$$K_I = d_0 \sin\theta \tag{28}$$

oder für kleine θ:

$$\boldsymbol{K_I} = \boldsymbol{d_0} \cdot \boldsymbol{\theta} \tag{29}$$

Die Schreibweise für kleine Winkel entspricht der in der Geometrischen Optik bekannten „**Helmholtz-Lagrange-Invarianten**“[17], die für parachsiale Abbildungen gefunden wurde. Sie ist prinzipiell für jede fehlerfreie Abbildung eines Objekts gültig[18] und soll im Folgenden auch kurz hergeleitet werden, Bild 20.

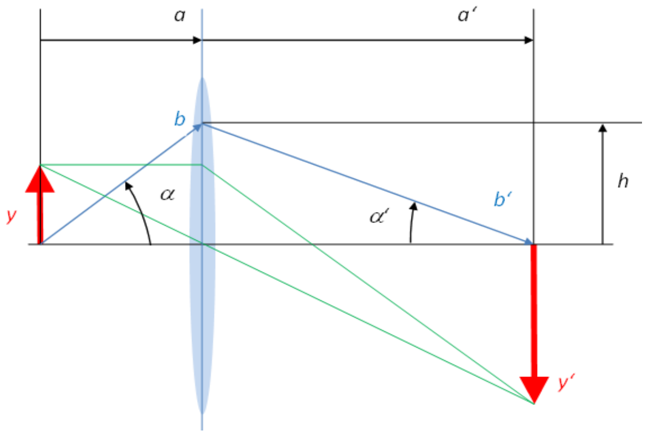


Bild 20: Zur Helmholtz-Lagrange-Invarianten

In diesem Modell wird die Optik für eine fehlerfreie Abbildung durch eine dünne Linse symbolisiert. Das Objekt mit der Objekthöhe *y* befindet sich in der Objekteben. Sein Bild in der Bildebene hat die Bildhöhe *y´*.

Der Abbildungsmaßstab β' ist definiert als

$$\boldsymbol{\beta'} = \frac{\boldsymbol{y'}}{\boldsymbol{y}} \tag{30}$$

Der Strahlensatz sagt aus $\frac{y'}{y} = \frac{a'}{a}$

Weiter gilt $\frac{y'}{y} = \frac{b'}{b'}$; (31)

denn bei fehlerfreier Abbildung konvergieren alle Strahlen aus einem Objektpunkt in den entsprechenden Bildpunkt und durchlaufen gleiche optische Weglängen. Damit ist für diese verschiedenen Wege der Abbildungsmaßstab der Gleiche.

Zusätzlich gilt: $b \cdot \sin(\alpha) = b' \cdot \sin(\alpha')$ und mit Gleichung (31) die Beziehung

$$y \cdot sin(\alpha) = y' \cdot sin(\alpha') \quad (32)$$

Für kleine Winkel (im Parachsialbereich der Geometrischen Optik) gilt *sin(α) = α*. Damit führt Gleichung (32) zur Helmhotz-Lagrange-Invarianten, Gleichung (33):

$$\boldsymbol{y \cdot \alpha = y' \cdot \alpha'} \quad (33)$$

Dies bedeutet, dass sich bei beliebigen **korrekten Abbildungen** das Produkt zwischen den Objekthöhen mit den dazugehörenden halben Öffnungswinkeln nicht ändert. Übertragen auf die Größen eines Laserstrahls mit dem Taillendurchmesser d_0 und der Divergenz θ bedeutet dies auch, dass deren Produkt $\boldsymbol{d_0 \cdot \sin\theta}$ (oder bei kleinen Divergenzen: $\boldsymbol{d_0 \cdot \theta}$) invariant gegen Abbildungen ist. Dieses Produkt wird deshalb wie in Gleichung (28) und Gleichung (29) definiert, **Strahlinvariante** oder **Strahlparameterprodukt**[19] genannt.

Die Strahlinvariante, verknüpft mit der Heisenbergschen Unschärferelation, führt zu einer Grenze, die für Strahlung jeder Art gilt. Da eine Kenntnis dieser Grenze hilfreich für verschiedene Betrachtungen von Laserstrahlen ist, folgt eine ausführlichere Ableitung dieser Grenze.

2.3.1 Auswirkung der Heisenbergschen Unschärferelation

Laserstrahlen sind räumlich begrenzte elektromagnetische Wellen oder ein räumlich begrenzter Strom von Photonen. Die einzelnen Photonen führen neben der Energie einen Impuls mit. Die Unschärferelation bezieht sich auf den Photonenstrom und auf die **Wirkung**[20]. Sie wurde von Heisenberg aus quantenmechanischen Betrachtungen mit dem Planckschen Wirkungsquantum *h* gefunden. Das Plancksche Wirkungsquantum ist neben der Lichtgeschwindigkeit und der Gravitationskonstanten die dritte Naturkonstante. Die Unschärferelation besagt in einem Fall, dass Position und Impuls eines Teilchens nicht gleichzeitig genaue Beträge einnehmen. Bei bekannter Position des Photons ist dessen Impuls unsicher und umgekehrt. Die Unschärfe des Ortes $\vec{x}$ und des Impulses $\vec{P}$ werden jeweils durch deren statistische Streuung σ_x und σ_p definiert.

Angewandt auf den Laserstrahl der Wellenlänge λ, und damit mit der Frequenz ν, wird hier die Ebene der Strahltaille betrachtet. Der Strahl tritt senkrecht durch diese Ebene innerhalb seines Durchmessers hindurch. Quantenmechanisch wird seiner Frequenz ν eine Energie *E* zugeordnet ($E = h \cdot \nu$). Diese Energie kann in Laserstrahlen sehr scharf begrenzt sein (Kapitel 2.1.4 und 2.1.5), wie Heisenbergs Energie-Zeit-Unschärferelation zeigt. Daraus folgt, dass der Betrag des mitgeführten Impulses $\vec{P}$ ebenso scharf begrenzt ist; denn $|\vec{P}|$ und *E* eines Photons sind über die Lichtgeschwindigkeit *c* verknüpft: $|\vec{P}| = \frac{E}{c}$. Eine Unschärfe des Impulses kann somit nur in

einer Unschärfe der Richtung des Impulsvektors liegen, also in Winkelabweichungen von der Strahl-Ausbreitungsrichtung. Dies wird im Folgenden für den Laserstrahl in der Ebene (am Ort) seiner engsten Begrenzung betrachtet.

Die engste Begrenzung ist die Strahltaille mit dem Durchmesser d_0. Dort werden die gesuchten Beziehungen für Impuls $\vec{P}$ und Ort $\vec{x}$ abgeleitet. In dem Modell beziehen sich Radius *r* und Winkel ∝ auf die Standardabweichung σ, also auf die Wendepunkte der Gaußschen Glockenkurven, welche die Wahrscheinlichkeit des Photonenstroms entsprechend der Wellenlänge λ bezüglich Ort und Impuls beschreiben; denn die Wahrscheinlichkeitsrechnung bezieht sich hier auf Standardabweichungen von eindimensionalen Normalverteilungen. In einem zweiten Schritt werden die Aussagen für die Wendepunkte σ_p und σ_x in Aussagen für die Stahlparameter d_0 und θ transformiert.

Nach Heisenberg kann das Produkt aus Impulsunsicherheit $\overrightarrow{\Delta P_x}$ mit der Ortsunsicherheit $\overrightarrow{\Delta x}$ in derselben Ebene einen bestimmten Betrag nicht unterschreiten. Für normalverteilte Impuls- und Ortswahrscheinlichkeiten und deren Standardabweichungen σ_p und σ_x ist diese:

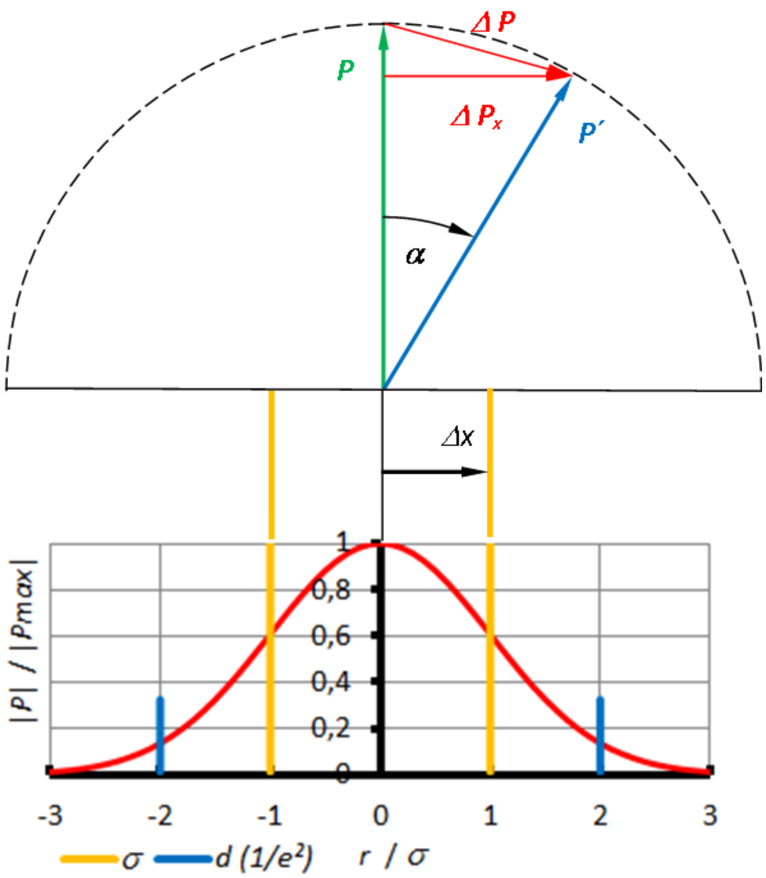


Bild 21: Anwendung der Unschärferelation von Heisenberg auf den Laserstrahl. Betrachtet wird die Ebenen der Strahltaille, das ist die Position im Strahl mit dem engsten Durchmesser. Die Leistungsdichte und damit die Dichte des Photonenstroms ist gaußverteilt.

$$\overrightarrow{\Delta P_x} \cdot \overrightarrow{\Delta x} \geq \frac{h}{4\pi}$$

(Heisenbergsche Unschärferelation). (34)

Weiter gilt die Teilchen-Welle-Äquivalenz nach de Broglie:

$$\left|\vec{P}\right| = \frac{h}{\lambda} \quad (35)$$

Für einen Laserstrahl der Wellenlänge λ, dessen engste Begrenzung in der Strahltaille mit dem Durchmesser d_0 liegt, lassen sich Impuls $\vec{P}$ und Ort $\vec{x}$ wie folgt betrachten, Bild 21, und daraus die gesuchten Beziehungen ableiten.

Die Photonen in der Strahlachse weisen den Impuls $\overrightarrow{P_{max}}$ auf. Betrachtet wird die Unsicherheit in der Strahltaille in Richtung der Ortsunsicherheit, also in *x*-Richtung

$\left|\overrightarrow{\Delta P_x}\right| = \sin\alpha \cdot \left|\overrightarrow{P'}\right|$ (aus der Geometrie)

$\left|\vec{P}\right| = \left|\overrightarrow{P'}\right|$ (da feste Wellenlänge), damit gilt:

$\left|\overrightarrow{\Delta P_x}\right| = \sin\alpha \cdot \left|\vec{P}\right|$

$\left|\overrightarrow{\Delta P_x}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta x}\right| = \sin\alpha \cdot \left|\vec{P}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta x}\right|$ (erweitert mit der Ortsunsicherheit $\left|\overrightarrow{\Delta x}\right|$)

$\left|\overrightarrow{\Delta P_x}\right| \cdot \left|\overrightarrow{\Delta x}\right| = \sin\alpha \cdot \frac{h}{\lambda} \cdot \left|\overrightarrow{\Delta x}\right|$ (de Broglie)

mit der Unschärferelation gilt

$\sin\alpha \cdot \frac{h}{\lambda} \cdot |\overrightarrow{\triangle x}| \geq \frac{h}{4 \cdot \pi}$ woraus folgt:

$$\sin\alpha \cdot |\overrightarrow{\triangle x}| \geq \frac{\lambda}{4 \cdot \pi}$$

Diese Aussage gilt für den Halbwinkel α und für den Radius *r* (Abstand von der Strahlachse in *x*-Richtung) jeweils für die Wendepunkte der Normalverteilung. Der Wechsel auf den 1/e²-Bezug für Radius $r = d_0/2$ und Winkel $\alpha = \theta/2$ erfolgt mit dem Faktor 4, siehe Bild 14 und Tabelle 1. Damit führt die Unschärferelation zu der Aussage

$$\frac{\boldsymbol{d_0}}{2} \cdot \boldsymbol{sin} \frac{\boldsymbol{\theta}}{\boldsymbol{2}} \geq \cdot \frac{\boldsymbol{\lambda}}{\boldsymbol{\pi}} \tag{36}$$

Für kleine Divergenzen θ bedeutet dies, dass das Strahlparameter-Produkt $K = \frac{d_0}{2} \cdot \frac{\theta}{2}$ nicht kleiner sein kann als$\cdot \frac{\lambda}{\pi}$.

Der nächste Übergang vom Radius und Halbwinkel zu Durchmesser d_0 und Divergenz θ erfolgt wieder mit einem Faktor 4. Hiermit wird die Strahl-Invariante erfasst.

$$K_I = d_0 \cdot \theta \geq \cdot \frac{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{\pi}} \cdot \boldsymbol{\lambda} \tag{37}$$

Die Strahl-Invariante K_I kann also nicht kleiner sein als etwa die Wellenlänge.

Diese theoretische Untergrenze wird in Gaußstrahlen erreicht. Ein Gaußstrahl, der diese Grenze erreicht, wird Grundmode-Laserstrahl genannt. Andere Gaußstrahlen haben eine größere Invariante; denn die Heisenbergsche Unschärferelation enthält die Relation „ ≤“. Der Vergrößerungsfaktor wird mit ***M*²** bezeichnet. Damit ist

$$\boldsymbol{K_I = M^2 \cdot \frac{4}{\pi} \cdot \lambda} \tag{38}$$

Dieser "Vergrößerungsfaktor" als Bestandteil der Invarianten K_I gibt somit an, wie weit der gegebene Laserstrahl von der naturgegebenen Untergrenze "Unschärferelation" abweicht.

2.4 STRAHLTRANSFORMATION

Die Kaustik eines Laserstrahls lässt sich über optische Komponenten in eine andere transformieren. Die Transformation erfolgt entsprechend bekannter physikalischer Gesetze. Einfache Gesetze sind aus der GEOMETRISCHEN OPTIK [21] bekannt, so die (Brennpunkt-bezogene) Newtonsche Abbildungsgleichung. Über diese lässt sich berechnen, wie ein Objekt mit dem Abstand *z* zum ersten Brennpunkt einer Fokussieroptik der Brennweite *f* abgebildet wird.

Die Newtonschen Abbildungsgleichungen für die Bildgröße und für die Bildlage beziehen sich auf die Brennebenen. Hierdurch werden die Gleichungen im Vergleich zur konventionellen (Hauptebenen-bezogenen) übersichtlicher. Für beidseitig der Abbildungsoptik gleiche Brechungsindices führt der Strahlensatz, Bild 22, zu

$$\frac{y}{z} = \frac{y'}{f}, \tag{39}$$

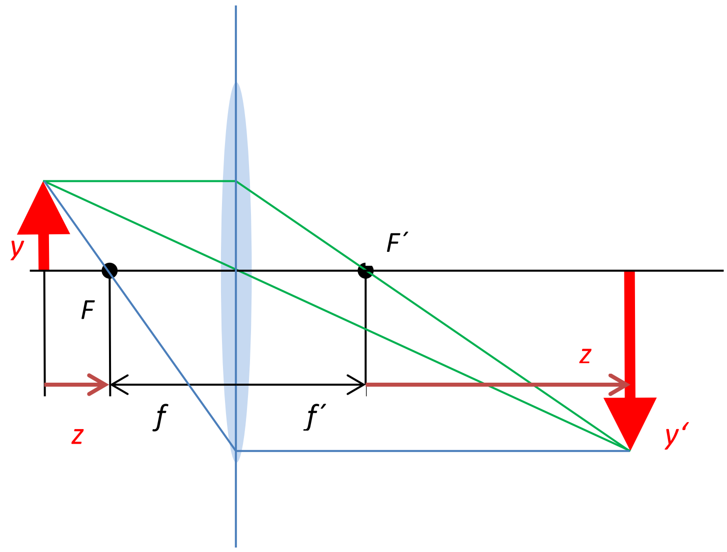


Bild 22: Zur Newtonschen Abbildungsgleichung

sowie zu $\frac{y'}{z'} = \frac{y}{f'}$, damit gilt $z \cdot z' = f \cdot f'$

Weiter ist $f = -f'$. Somit gilt auch

$$\boldsymbol{z \cdot z' = -f'^2} \tag{40}$$

Gleichung (35) wird zur Ableitung der Gesetze für die Transformation der Strahltaille benötigt, Gleichung (36) für die zur Transformation der Strahltaillenlage (Fokusverschiebung).

2.4.1 TRANSFORMATION DES TAILLENDURCHMESSERS

Für die Beschreibung der optischen Transformation eines Laserstrahls wird die Strahltaille als Objekt betrachtet. Die Strahltaille lässt sich mit optischen Komponenten nach Gesetzen der Geometrischen Optik transformieren. Gleichung (39), führt zu einer Transformation des

Objektes Taillendurchmessers d_0 in sein Bild, Taillendurchmesser $d_0´$, wenn die Größen *y* und *y´* ersetzt werden durch d_0 und $d_0´$.

Damit wird Gleichung (39) zu

$$\frac{d_0}{z} = \frac{d_0´}{f´} \quad (41)$$

Die Strahltaille mit dem Durchmesser d_0 wird transformiert in den Fokusdurchmesser $d_0´$ über die Gleichung

$$\boldsymbol{d_0´ = d_0 \cdot \frac{f}{z}} \quad (42)$$

Dies wäre der berechnete Durchmesser des Strahltaillenbildes, wenn die Unschärferelation nicht berücksichtigt werden müsste, Bild 22 roter Graph. Die Abbildungsgleichung (42) ist für $z = 0$ nicht definiert. Der Graph zeigt dort eine Polstelle, die bei Transformation von Laserstrahlen nicht beobachtet wird. Also gelten die Gesetze der Geometrischen Optik mit Sicherheit nicht in der Nähe von $z = 0$.

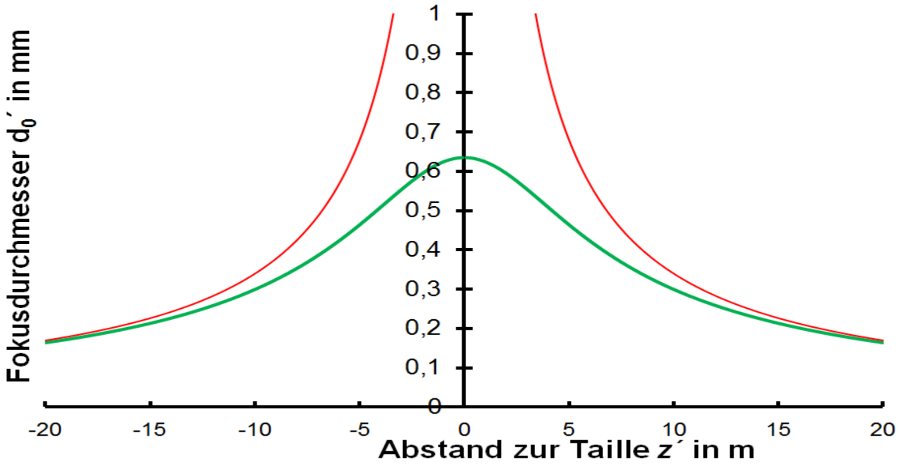


Bild 23: Durchmessertransformation durch Abbildung eines Laserstrahls für verschiedene Abständen z des Optikbrennpunktes von der Strahltaille.
d_0 = 17 mm, *f* = 200 mm, K_l = 54 µm rad, mit Berücksichtigung der Beugung (grün) und nach Newton (rot), der Abstand z und ist brennpunktbezogen

Das liegt daran, dass die Gesetze der Geometrischen Optik auf homozentrischen Bündeln beruhen, also für Strahlen gelten, die von einem Punkt ausgehen und über Abbildungsoptiken mit Brennpunkten in einen Punkt transformiert werden. Aufgrund der Unschärferelation ist dies für physikalische Strahlung nicht möglich, siehe 3.2.1. Diese Strahlenbündel verlaufen innerhalb von Hyperboloiden und nicht innerhalb von Kegeln. Die Unterschiede zwischen Kegel und Hyperboloiden können sich in Berechnungen von Abbildungsergebnissen für Bereiche auswirken, in denen sich beide Figuren merkbar unterscheiden. Das ist gerade die der Bereich um die Stahltaillen. Die Ergebnisse sind dann falsch, wenn dort ein Brennpunkt der Optik des Abbildungssystems positioniert ist.

Bei Berücksichtigung der Unschärfe (zur Ermittlung des korrekten Ergebnisses) wird die Abbildungsgleichung (42) durch einen Term modifiziert, welcher die Hyperboloid-Form der

Kaustik berücksichtigt: Dieser Term ist die Rayleighlänge, Gleichung (27). Damit ist Gleichung (43) die korrekte Abbildungsgleichung für Gaußstrahlen[22].

Die Rayleighlänge enthält zwei Parameter d_0 und θ, welche die Hyperbel eindeutig beschreiben. Damit sind zwei weitere Schreibweisen gleichbedeutend, Gleichung (44) und Gleichung (45).

$$\boldsymbol{d_0}' = \boldsymbol{d_0} \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{z^2+z_R{}^2}}} \tag{43}$$

oder

$$\boldsymbol{d_0}' = \boldsymbol{d_0} \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{z^2+\left(\frac{d_0{}^2}{K_I}\right)^2}}} \tag{44}$$

oder

$$\boldsymbol{d_0}' = \boldsymbol{d_0} \frac{\boldsymbol{f}}{\sqrt{\boldsymbol{z^2+\left(\frac{K_I}{\theta^2}\right)^2}}} \tag{45}$$

In Berechnungen über die korrekte Abbildungsgleichung, Bild 23, grüner Graph, tritt eine Polstelle nicht auf. Das Ergebnis zeigt ein Maximum des Bilddurchmessers (Fokusdurchmessers) dort, wo die Geometrische Optik eine Polstelle anzeigt. Die primäre Strahltaille befindet sich dabei im primären (objektseitigen) Brennpunkt der Abbildungsoptik, das heißt, bei $z = 0$.

In großen Abständen der primären Strahltaille zum Optikbrennpunkt kann die Rayleighlänge vernachlässigt werden. Die beiden Ergebnisse gehen ineinander über. Die einfachen Gesetze aus der Technischen Optik gelten wieder näherungsweise.

Das Maximum des Bilddurchmessers (der maximale Fokusdurchmesser) lässt sich berechnen, wenn die Kaustik des Ausgangsstrahls bekannt ist, das heißt, wenn zwei Strahlparameter bekannt sind, welche die Strahlkaustik eindeutig kennzeichnen. Für $z = 0$ führt Gleichung (43) mit $z_R = d_0/\theta$ zum Ergebnis

$$\boldsymbol{d_0}' = \boldsymbol{f \cdot \theta}. \tag{46}$$

Für die Praxis gilt damit näherungsweise, dass der Fokusdurchmesser (Bilddurchmesser) hinter einer Fokussieroptik als Produkt von Brennweite mal Divergenz abgeschätzt werden kann; denn die Fokussieroptik befindet sich in vielen Fällen in der Nähe des Lasers und damit in der Nähe der primären Strahltaille.

Der **Abbildungsmaßstab** ist definiert als $\beta' = \frac{y'}{y}$, siehe Gleichung (30). Das gilt auch für die Durchmessertransformation von Strahltaillen. Die Gesetze der Geometrischen Optik, hier Gleichung (42), würden zum Ergebnis führen

$$\beta' = \frac{f}{z} \tag{47}$$

Das Ergebnis gilt wiederum nur in großen Abständen der Transformationsoptik von der Strahltaille, wie die Diskussion zu Bild (23) zeigt. Der korrekte Abbildungs-Maßstab ergibt sich aus der korrekten Abbildungsgleichung, Gleichung (43). Der Maßstab ist somit

$$\beta' = \frac{f}{\sqrt{z^2+z_R{}^2}} \tag{48}$$

2.4.2 TRANSFORMATION DER STRAHLTAILLENLAGE

Zur Beschreibung der Position der Strahltaille nach einer Abbildung über eine optische Komponente werden wieder Gesetze aus der Geometrischen Optik hinzugezogen. Ausgegangen wird von der Abbildungsgleichung nach der Newtonschen Formulierung Gleichung (40) mit Bild 22. Der Bildort der Strahltaille liegt im Abstand *z´* zum zweiten Brennpunkt der Optik.

Die explizite Form aus der geometrischen Optik für *z´* ist

$$z' = -\frac{f'^2}{z} \tag{49}$$

Diese Abbildungsgleichung gilt jedoch nicht mehr, wenn die Unschärfe berücksichtigt werden muss,[23] das heißt, wenn sich die abbildende Optik in der Nähe der Strahltaille befindet. Für diesen Fall wird die Newtonsche Abbildungsgleichung durch einen Unschärfeterm z_R modifiziert, Bild 24 und Gleichung (49) zu:

$$z' = -\frac{f'^2 z}{z^2 + z_R^{\ 2}} \tag{50}$$

Mit $z_R = \frac{d_0}{\theta}$ und $K_I = d_0 \cdot \theta$ sind entsprechende Modifikationen der Gleichung (50) für weitere bevorzugte Strahlparameter möglich und üblich, siehe Tabelle 2. Über diese Gleichungen wird der Bereich um die Strahltaille korrekt wiedergegeben, Bild 24, grüner Graph. Für die Berechnung wurde die Modifizierung der Gleichung (50) gewählt, in der die Rayleighlänge durch die üblicherweise bekannten Größen d_0 und θ des Primärstrahls ersetzt wurde, siehe Tabelle 2. Die Strahlparameter entsprechen denen eines CO2-Hochleistungslasers.

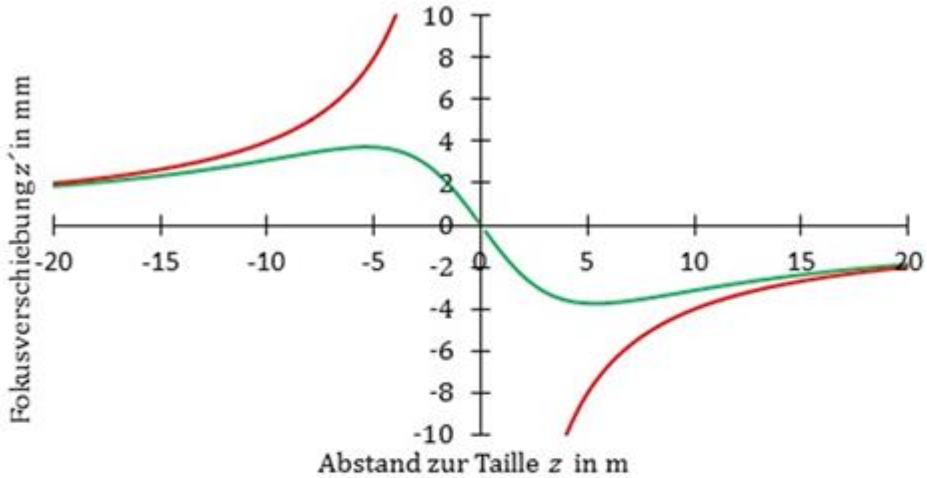


Bild 24: Transformation der Taillenlage (Fokusverschiebung) durch Abbildung eines Laserstrahls für verschiedene Abstände z des Optikbrennpunktes von der Strahltaille d_0 = 17 mm, f = 200 mm, K_I = 54 µm rad, mit Berücksichtigung der Beugung (grün) und nach Newton (rot), der Abstand *z* ist Brennpunkt-bezogen

Näherungslösungen über Gesetze, die aus dem Bereich der Geometrischen Optik bekannt sind, gelten für größere Abstände zur Strahltaille hinreichend genau. Das ist der Fall, wenn die

Abstände der Strahltaille groß gegenüber der Rayleighlänge sind, also für den Fall $z \gg z_R$. Das zeigt Gleichung (50).

Bemerkenswert ist, dass dann, wenn die primäre Strahltaille im primären Fokus der Abbildungsoptik liegt (*z* = 0), die sekundäre Strahltaille (der Fokus) in den sekundären Brennpunkt abgebildet wird; denn ($z_R \neq 0$).

Position der Extrema

Die Fokusverschiebung, Bild 21, weist zwei Extremwerte auf. Die Lage z'_{extr} dieser Extrema lässt sich über das bekannte Verfahren zur Extremwertbestimmung aus der Abbildungsgleichung, Gleichung (51), wie folgt ermitteln:

$$\frac{d}{dz}\left(z' = -\frac{f'^2 z}{z^2 + z_R^{\,2}} \right) = 0$$

Diese Ableitung nach *z* ergibt: $$0 = f' \frac{z - z_R}{\left(z + z_R\right)^2}$$

und somit liegen die Extrema bei $z_{extr} = \pm\, z_R$

dies ist gleichbedeutend mit: $z_{extr} = \pm\, \frac{{d_0}^2}{K_I}$ denn $z_R = \frac{d_0}{\theta}$ und $\theta = \frac{K_I}{d_0}$

Der Fokus ist also gegenüber dem sekundären Brennpunkt der Optik maximal verschoben, wenn der primäre Brennpunkt im Abstand der Rayleighlänge von der Strahltaille entfernt ist.

Mit Kenntnis der Position dieser Extrema ($z_{extr} = \pm\, \frac{{d_0}^2}{K_I}$) ist auch der Betrag der maximalen Fokusverschiebung z'_{extr} eindeutig festgelegt, und zwar über die Abbildungsgleichung, Gleichung (51):

$$z'_{extr} = -f'^2 \frac{z_{extr}}{{z_{extr}}^2 + {z_R}^2}$$

Hier ist $\boldsymbol{z_R}$ die Rayleighlänge des **Primärstrahls**! Damit verschiebt sich der Fokus maximal um

$$z'^{\,max}_{\,extr} = \pm \frac{1}{2 \cdot z_R} \cdot f'^2$$

Dies ist gleichbedeutend mit: $z'^{\,max}_{\,extr} = \pm \frac{K_I}{2 \cdot {d_0}^2} \cdot f'^2$ (da $z_R = d_0/\theta$ und $\theta = K_I/d_0$)

Folgerung aus den Diskussionen:

Wenn ein Laserstrahl in verschiedenen Positionen entlang seines Weges über eine Optik mit fester Brennweite fokussiert werden soll, liegt der Fokus nur dann im sekundären Brennpunkt der Optik, wenn sich ihr primärer Brennpunkt in der Strahltaille des Laserstrahls befindet. Kleine Abweichungen von dieser Position bewirken eine empfindliche Änderung der Fokuslage. Vor der Strahltaille liegt der Fokus näher an der Optik hin, hinter der Strahltaille weiter von dieser weg. Die Beträge dieser Verschiebungen erreichen ihr Maximum wenn die Optik am Ort der Rayleighlänge des Laserstrahls positioniert ist. In der Nähe dieser Position ändert sich die

Fokuslage verhältnismäßig wenig. Bei vorgegebener Qualität des Strahles (gekennzeichnet durch die Stahlinvariante K_I) kann die extremale Verschiebung über eine Aufweitung des Primärstrahls verringert werden. Eine Vergrößerung des Taillendurchmessers im Primärstrahl über einen Faktor *x* verringert die maximale Fokusverschiebung quadratisch um den Faktor $(1/x)^2$. Den entsprechenden quadratischen Einfluss hat die Steuerung des Taillendurchmessers auf die Lage der Extrema: Mit der Aufweitung des Taillendurchmessers um den Faktor *x* verschieben sich die Positionen der extremen Fokusverschiebungen um den Faktor x^2 von der Strahltaille.

2.5 EINIGE FORMELN ZUR BESCHREIBUNG VON EIGENSCHAFTEN EINES LASERSTRAHLS

E_0	Bestrahlungsstärke im Zentrum des Grundmodestrahls
$E_d = \frac{1}{e^2} \cdot E_0$	Zur Durchmesser-Definition: Bestrahlungsstärke am Ort des Strahldurchmessers *d* im rotations-symmetrischen Strahl mit Gaußverteilung der Bestrahlungsstärke (Grundmode, Maximum E_0)
$\frac{E}{E_0} = e^{-8 \cdot \frac{r^2}{d^2}}$	Verteilung der Bestrahlungsstärke in einem rotationssymmetrischen Grundmodestrahl, Durchmesser *d*, Maximum E_0, Radius *r*
$K = \frac{d_0}{2} \cdot \frac{\theta}{2}$	Strahlparameterprodukt (SPP)
$K_I = d_0 \cdot \theta$	Strahl-Invariante
$z_R = \frac{d_0}{\theta}$	Rayleigh-Länge
$K_{I.00} = \frac{4}{\pi} \cdot \lambda$	Strahl-Invariante für den Grundmode
$M^2 = \frac{K_I}{K_{I.00}}$	Beugungsmaßzahl (M-Quadrat)

$d = \sqrt{d_0^2 + \theta^2 \cdot z^2}$	Gleichung der Kaustik
$z' = -\frac{f' \cdot d_0}{z^2 + z_R^2}$	Transformation der Strahltaillenposition (Fokusposition) mit Brennweite *f,* zu beachten: *f = - f '*
$d'_0 = \frac{f \cdot d_0}{\sqrt{z^2 + z_R^2}}$	Transformation des Taillendurchmessers d_0 in den sekundären Durchmesser (Fokus-durchmesser) d_0' mit Brennweite *f* ; Abstand *z* des primären Fokus von primärer Strahltaille; Rayleigh-Länge z_R
$d'_0 = \frac{f \cdot d_0}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{d_0}{K_I}\right)^2}}$	Transformation des Taillendurchmessers d_0 in den sekundären Durchmesser (Fokus-durchmesser) d_0' mit Brennweite *f* ; Abstand *z* des primären Fokus von primärer Strahltaille; Invariante K_I,
$d'_0 = \frac{f \cdot d_0}{\sqrt{z^2 + \left(\frac{K_I}{\theta^2}\right)^2}}$	Transformation des Taillendurchmessers d_0 in den sekundären Durchmesser (Fokus-durchmesser) d_0' mit Brennweite *f* ; Abstand *z* des primären Fokus von primärer Strahltaille; Invariante K_I; primäre Divergenz ϑ
$d'_{0.max} = f \cdot \theta$	Taillendurchmesser nach Fokussierung über die Brennweite *f* bei einer Divergenz *Θ* des Primären Strahls. **Die primäre Strahltaille liegt im primären Brennpunkt**. Der Durchmesser ist in dieser Position maximal.
$E_m = \frac{P}{\frac{\pi}{4} \cdot d^2}$	Mittlere Bestrahlungsstärke in einem rotationssymmetrischen Grundmodestrahl (bezogen auf den Querschnitt innerhalb des Durchmessers)
$E_0 = \frac{8 \cdot P}{\pi \cdot d^2} = 2 \cdot E_m$	Maximum der Bestrahlungsstärke in einem rotationssymmetrischen Grundmodestrahl; dies liegt im Zentrum
$P = 2 \cdot \pi \cdot E_0 \cdot \int_0^{\infty} r \cdot e^{-8 \cdot \frac{r^2}{d^2}} dr$	Gesamtleistung eines rotationssymmetrischen Grundmodestrahls mit Durchmesser *d* und der Bestrahlungsstärke E_0 im Maximum (Zentrum)

$P = 2 \cdot \pi \cdot E_0 \cdot \int_0^{\frac{d}{2}} r \cdot e^{-8 \cdot \frac{r^2}{d^2}} \, dr$	Leistungsfluss innerhalb des Durchmessers *d* in einem rotationssymmetrischen Grundmodestrahl mit Durchmesser *d* und der Bestrahlungsstärke E_0 im Maximum (Zentrum)
$\frac{P_d}{P} = 1 - e^{-2} = 0.865$	Leistungsanteil innerhalb des Durchmessers *d* in einem rotationssymmetrischen Grundmodestrahl, bezogen auf die Gesamtleistung
$\frac{P_{lin}}{P} = fehlf\left(\sqrt{2}\right) = 0.9545$	Leistungsanteil innerhalb zweier linearer Begrenzungen in der Position *d* in einem rotationssymmetrischen Grundmodestrahl, bezogen auf die Gesamtleistung
$\frac{P(r \leq -a)}{P} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - fehlf\left(\sqrt{2}\right)\right) = 0.02275$	Leistungsanteil außerhalb des Durchmessers im Grundmodestrahl mit **rotationssym-metrischem** Querschnitt, der durch eine lineare Blende in der Begrenzung *d* ausgeblendet wird
$P = E_0 \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2 \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)} \, dy \, dx$	Gesamtleistung in einem Grundmodestrahl bei **elliptischem** Querschnitt mit den Ellipsenparametern *a* und *b*, sowie der maximalen Bestrahlungsstärke (im Zentrum) E_0
$\frac{P(x \leq -a)}{P} = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - fehlf\left(\sqrt{2}\right)\right) = 0.02275$	Leistungsanteil außerhalb des Ortes einer Strahlabmessung im Grundmodestrahl mit **elliptischem** Querschnitt, ausgeblendeter durch eine lineare Blende

2.6 ZUSAMMENFASSUNG

Ausgang der theoretischen Behandlung von Laserstrahlen – so wie sie für die Materialbearbeitung in industrieller Anwendung verwendet werden – ist der Hintergrund, dass auch Laserstrahlen nichts Anderes sind als Licht im allgemeinsten Sinn. Das bedeutet, dass in vielen Fällen Kenntnisse der allgemeinen optischen Gesetze ausreichen, um das Verhalten von laserstrahlen zu verstehen und zu beschreiben. Die Gesetze der „Geometrischen Optik“ versagen lediglich in Brennpunktbereichen.

Auf dieser Basis wurden in den vorangegangenen Kapiteln die wesentlichen Eigenschaften von Laserstrahlen dargestellt, beschrieben und auch abgeleitet, die in der industriellen Materialbearbeitung eingesetzt werden. Damit sollte der Leser in der Lage sein,

- Eigenschaften von Laserstrahlen zu verstehen und zu beurteilen,
- Laserstrahlen für gewünschte Anwendungen auszuwählen,
- Laserstrahlen an die Anforderungen der gewünschten Anwendung anzupassen,
- Eigenschaften von Laserstrahlen zu messen.

Die Zusammenstellung der Formeln hilft zudem, Beschreibungen von Laserstrahlen zu verstehen, die in der industriellen Materialbearbeitung verwendet werden.

2.7 REFERENZEN

[1] Hier betrachtet im Wellenbild

[2] Hier wird der Begriff aus der Geometrischen Optik gewählt, um zu kennzeichnen, dass mit „Strahl“ nicht der mathematische Begriff gemeint ist, und um auf seine räumliche Ausdehnung hinzuweisen

[3] Welle, vereinfacht nach DIN 1311: zeitlich periodische Änderung eines Zustandes im Raum, die sich einsinnig räumlich ändert

[4] Über die räumliche Kohärenz werden beispielsweise Sterndurchmesser gemessen.

[5] Siehe 2.1.4 Kohärenz

[6] Ausführlich behandelt werden Laser im Lehrbuch „Bert Struve: Einführung in die Lasertechnik; VDE-Verlag, Berlin 2009“

[7] Beschrieben im Kapitel 2.2.1Transversale Modenordnung

[8] Beschrieben im Kapitel 2.3 Strahlausbreitung

[9] Beschrieben im Kapitel 2.3 Strahlausbreitung

[10] Kapitel 2.1.3 Elektromagnetische Strahlung

[11] Beschrieben im Kapitel 0 Abbildungen

[12] Laserstrahl-Modenordnungen werden behandelt in Kapitel 2.2 Gaußstrahlen

[13] Erklärt in Kapitel 2.3 Strahlausbreitung

[14] Kapitel 0

[15] Moden werden beschrieben im Kapitel 2.2.1.1

[16] Beschrieben in Kapitel 2.2.3

[17] In dieser Form für beidseitig der Optik gleiche Brechungsindices, Lehrbuch Gottfried Schröder, Hanskarl Treiber: Technische Optik, Vogel Fachbuch 2002; S. 33

[18] Hier sei darauf hingewiesen, dass strahlenoptisch wirkende Systeme wie Linsen- oder Spiegeloptiken keine dreidimensional ausgedehnten Objekte maßstabsgetreu abbilden können. Das ist nur über wellenoptische Methoden (Holographie) möglich.

[19] In DIN ist das Strahlparameterprodukt ein Viertel der hier in der Strahlinvarianten festgelegten Definition

[20] Die Wirkung *S* ist eine physikalische Größe mit der Dimension Energie mal Zeit oder Impuls mal Weglänge.

[21] Lehrbuch Gottfried Schröder, Hanskarl Treiber: Technische Optik, Vogel Fachbuch 2002

[22] Aus wellenoptischen Betrachtungen abgeleitet zum Beispiel in: J. Eichler; H.-J. Eichler: Laser, Grundlagen-Systeme-Anwendungen; Springer-Verlag Berlin …, 1991

[23] Analog zu 2.4.1 Transformation des Taillendurchmessers